

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 023

Titolo nota

13/10/2011

SUCCESIONI MONOTONE

Def. Una successione a_n si dice

- debolmente crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- strettamente " " $a_{n+1} > a_n$ " " "
- debolmente decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$ " " "
- strettamente " " $a_{n+1} < a_n$ " " " ,

Oss. Una è debolmente crescente se e solo se

$$a_m \geq a_n \quad \text{per ogni } m \geq n$$

Idem per le altre 4 possibilità.

Questi sono 2 modi equivalenti di dare la stessa definizione.

Oss. Se a_n è strettamente crescente, allora è pure debolmente crescente.

Teorema (in versione crescente). Sia a_n una successione debolmente crescente (se è crescente strett., allora meglio).

Allora a_n ha solo 2 possibilità: $a_n \rightarrow +\infty$ oppure $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Inoltre $a_n \rightarrow L = \text{estremo superiore}$ (può essere $+\infty$ oppure $\in \mathbb{R}$).

Teorema (in versione decrescente). Sia a_n debolmente decrescente.

Allora $a_n \rightarrow l = \text{estremo inferiore}$ (può essere $-\infty$ oppure $\in \mathbb{R}$).

Corollario Sia a_n una succ. Supponiamo che

(i) a_n debolmente crescente,

(ii) a_n limitata superiormente, cioè ha almeno un maggiorante, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ b.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (cioè è di tipo ①).

Idem con decrescente e limitata inferiormente.

Dim. teorema in versione crescente Ci sono 2 casi.

Caso 1: $\sup = +\infty$ Ipotesi: il $\sup$ della successione è $+\infty$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

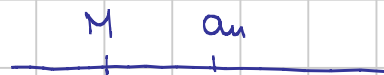
L'ipotesi è equivalente a dire che

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \text{ b.c. } a_n \geq M$$

La tesi è equivalente a dire che

$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ definitivamente.

Ora la successione è debolmente crescente, quindi se supera M per un valore di n , lo supera anche per tutti i valori successivi, quindi lo supera definitivamente.



Caso 2: $\sup = L \in \mathbb{R}$ Ipotesi: il $\sup$ della successione è un certo $L \in \mathbb{R}$

Tesi: $a_n \rightarrow L$

L'ipotesi è equivalente a dire che

(i) $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \text{ b.c. } a_n \geq L - \varepsilon$

La tesi è equivalente a dire che

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente.

Quindi:

fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $a_n \geq L - \varepsilon$ per un certo valore di n .

Per la debole crescenza avremo che $a_n \geq L - \varepsilon$ per tutti i valori successivi, quindi $a_n \geq L - \varepsilon$ definitivamente. D'altra parte $a_n \leq L \leq L + \varepsilon$ per ogni n , quindi definitivamente.



Esercizio: riscrivere la dimostrazione in versione decrescente.

— o — o —

Il numero e Consideriamo la successione $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Allora ① $e_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

② e_n è debolmente crescente (anzi strettamente)

③ $e_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per il te. sulle succ. monotone questo dice che $a_n \rightarrow l \in (2, 3]$

Dim. ① Considero la disug. di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$
Ponendo $x = \frac{1}{n}$ ottengo che

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

Dim. ② Devo dimostrare che $e_n \geq e_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} e_n \stackrel{?}{\geq} e_{n-1} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{?}{\geq} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \stackrel{?}{\geq} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \stackrel{?}{\geq} \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^{2n}} \stackrel{?}{\geq} \frac{n-1}{n} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \stackrel{?}{\geq} \frac{n-1}{n} \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \stackrel{?}{\geq} 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Considero nuovamente $(1+x)^n \geq 1+nx$ (vera $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1$)
e la applico con $x = -\frac{1}{n^2}$, che è > -1 . Ottengo

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Questo dimostra l'ultima disuguaglianza della catena, che però è
equivalente alla 1^a, che era $e_n \geq e_{n-1}$.

Dim. di ③. Devo dimostrare che $e_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{lo sviluppo con il binomio di Newton}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Quindi

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} \quad (\text{uso seconda versione})$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}$$

Al numeratore ho
k termini: $n, n-1, n-2, \dots$

Al denominatore ho
k termini: $n, n, n, \dots$

$$\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right]$$

< 2

$$\leq 3.$$

Oss. Perché $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} < 2$?

$$1 + a + a^2 + \dots + a^k = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} \leq \frac{1}{1-a}$$

dim. per induzione.

Quando $a = \frac{1}{2}$ viene proprio 2.

— o — o —