

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 022

Titolo nota

12/10/2011

SOTTOSUCCESIONI Sia a_n una successione.

Considerare una s.succ. di a_n vuol dire "pescare un po' di termini" con indici strettamente crescenti

$$\boxed{a_0}, \boxed{a_1}, a_2, \boxed{a_3}, a_4, a_5, \boxed{a_6}, \boxed{a_7}, a_8, \boxed{a_9}, \dots$$

Oss. Ci sono in giro due tipi di definizione

→ più restrittiva: gli indici si pescano in maniera strett. crescente

→ più generale: si può anche tornare indietro, ma gli indici devono comunque tendere a $+\infty$.

Esempi $a_{2n} =$ sottosuccessione costituita dai termini di indice pari
 $= a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

$$a_{2n+1} = \dots \text{ indici dispari} = a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$$

$$a_{4n+3} = a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, a_{19}, \dots \text{ (di 4 in 4 a partire da 3)}$$

$$a_{n^2} = a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots$$

$$(a_n)^2 = a_0^2, a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$$

Caso speciale $a_{n+k} = a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots$

Questa pesca tutti i termini da un certo punto in poi.

In un certo senso è una sottosuccessione FINITA, ottenuta solo shiftando gli indici.

Teorema Sia a_n una successione. Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora TUTTE le sottosuccessioni di a_n tendono allo stesso l .

Achtung! Se a_n è indeterminata, cioè il suo limite non esiste, non è detto che anche una sua sottosuccessione sia indeterminata.

Esempio $a_n = (-1)^n$ $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

a_n non ha limite. Tuttavia

$a_{2n} \rightarrow 1$ e $a_{2n+1} \rightarrow -1$, quindi queste 2 sottosucc.
hanno limite,

a_{4n} invece è $1, -1, 1, -1, \dots$ e quindi non ha limite.

Conseguenza del teorema. Sia a_n una successione. Supponiamo che

- esista una sottosuccessione che ha un limite $l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$
- " un'altra " " " " $l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$
- $l_1 \neq l_2$.

Allora a_n non ha limite.

Dim.: se per assurdo avessimo che $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosucc.
dovrebbero tendere allo stesso limite l .

Operativamente: se voglio dimostrare che il limite di a_n non esiste, mi
basta trovare 2 sottosuccessioni con limiti diversi.

Esempio 1 $a_n = n^2 + (-1)^n n^3$. Provo con i pari ed i dispari.

$$a_{2n} = (2n)^2 + (-1)^{2n} (2n)^3 = 4n^2 + 8n^3 \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= (2n+1)^2 + (-1)^{2n+1} (2n+1)^3 = (2n+1)^2 - (2n+1)^3 \\ &= (2n+1)^2 (\cancel{x} - 2n \cancel{x}) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

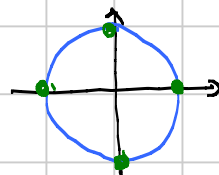
Esempio 2 $a_n = n^3 + (-1)^n n^2$. Ora $a_n \rightarrow +\infty$

$$a_n = \underbrace{n^3}_{\rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\rightarrow 0} \right) \rightarrow +\infty \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}$$

Esempio 3 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ $0, 1, 0, -1, 0$

$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n\right) = \sin(\pi n) \rightarrow 0$$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} (4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1$$



Come dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste? ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$)

Basta trovare 2 successioni a_n e b_n tali che

① $a_n \rightarrow x_0, b_n \rightarrow x_0$

② $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno 2 limiti diversi.

Dim.: Supponiamo per assurdo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{Stesso discorso per } f(b_n)$$

↑
Pongo $x = a_n$. Quando $n \rightarrow +\infty$
ho che $x \rightarrow x_0$

Quindi tenderebbero ad l
entrambi.

Esempio 4 Voglio dim. che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ non esiste.

Per dimostrarlo devo trovare 2 successioni a_n e b_n tali che

① $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow +\infty$

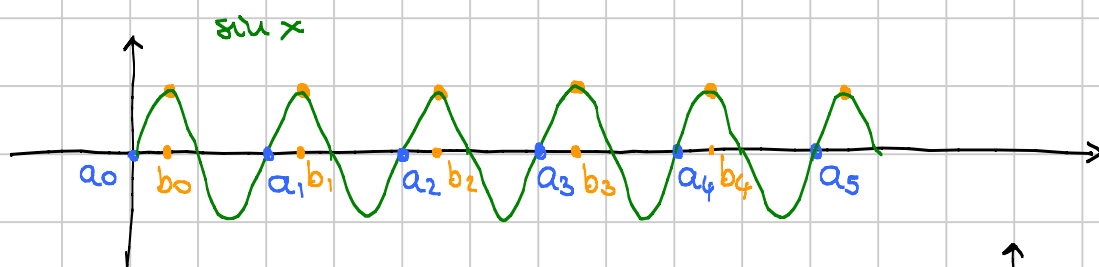
② $\sin a_n \rightarrow l_1, \sin b_n \rightarrow l_2 \neq l_1$.

$$a_n = 2\pi n \rightarrow +\infty$$

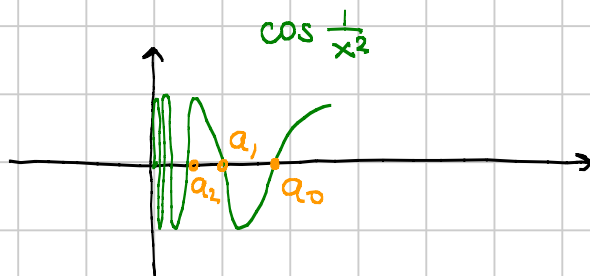
$$\sin a_n = \sin(2\pi n) = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$$

$$\sin b_n = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1.$$



Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x^2}$ N.E.



Devo trovare a_n e b_n tali che

① $a_n \rightarrow 0^+, b_n \rightarrow 0^+$

② $\cos \frac{1}{a_n^2} \rightarrow l_1, \cos \frac{1}{b_n^2} \rightarrow l_2 \neq l_1$

Dove si ha che $\cos \frac{1}{a_n^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n^2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

Quindi posso prendere $a_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$, cioè $a_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi n}} \rightarrow 0^+$

Dove si ha che $\cos \frac{1}{b_n^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b_n^2} = 2\pi n$

Quindi posso prendere $b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0^+$.

— 0 — 0 — 0 —

$a_n \rightarrow 8 \Rightarrow a_{2n} \rightarrow 8$ VERA (teo. s.succ.)

$a_{2n} \rightarrow 8 \Rightarrow a_n \rightarrow 8$ FALSA (8, -1, 8, -1, 8, -1, 8, -1, ...)

$a_n \rightarrow 12 \Rightarrow a_{n^2} \rightarrow 12$ VERA (s.succ.)

$a_{n^2} \rightarrow 12 \Rightarrow a_n \rightarrow 12$ FALSA $a_n = 12$ se $n = \square$ e $a_n = 0$ altrimenti

$a_n \rightarrow 3 \Rightarrow a_{n+5} \rightarrow 3$ VERA (s.succ.)

$a_{n+5} \rightarrow 3 \Rightarrow a_n \rightarrow 3$ VERA (s.succ. FINTA)

$a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sin(a_n)$ non ha limite FALSA

(ad esempio $a_n = 2\pi n$)

— 0 — 0 —