

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 021

Titolo nota

12/10/2011

Dimostrazioni dei principali limiti notevoli

PADR1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ non lo dimostro, ma segue da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Oss. Se è vero per $x \rightarrow +\infty$, allora è vero per $n \rightarrow +\infty$ (criterio funzioni $\rightarrow$ successioni), ma qui servirebbe una specie di viceversa, che in generale è falso, ma in casi speciali come questo è vero.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Intanto basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Questo perché $\frac{\sin x}{x}$ è PARI.

Supponiamo di aver dimostrato che $\sin x \leq x \leq \tan x$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2})$
Allora divido per $\sin x$ e ottengo che

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \quad \text{per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

N.B.: ho mantenuto i versi perché $\sin x > 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Quindi

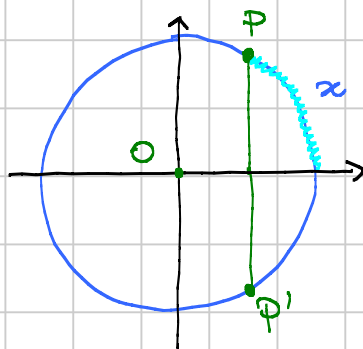
$$\boxed{1} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \text{per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\frac{1}{\cos 0} = 1$

Quindi per i carabinieri si ha che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$, da cui anche quello che volevamo.

Restano da dimostrare $\sin x \leq x$ e $\tan x \geq x$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\boxed{\sin x \leq x}$ lunghezza arco $PP' = x$
lunghezza segmento $PP' = 2 \sin x$
lunghezza segm. $\leq$ lunghezza arco
 $2 \sin x \leq x$

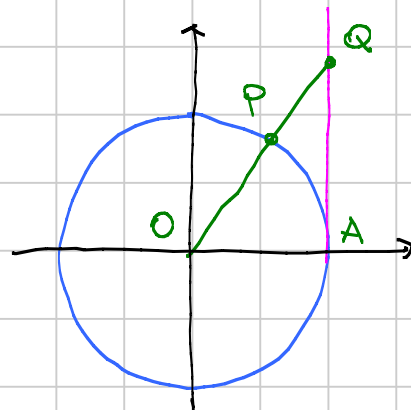


$$\boxed{x \leq \tan x} \quad \tan x = AQ$$

Come lunghezza non è evidente che $AQ \geq \widehat{AP}$.

Lo dimostro con le aree.

$$\text{Area (OAQ)} = \frac{1}{2} \overset{1}{OA} \cdot AQ = \frac{1}{2} \tan x$$



$$\text{Area Settore (OAP)} : \text{Area cerchio} = \frac{\widehat{AP}}{\pi} : \frac{\text{Lunghezza circonferenza}}{2\pi}$$

$$\frac{\pi}{\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \text{Area Settore (OAP)} = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{1}{2} x$$

$$\text{Area settore} \leq \text{Area triangolo, quindi } \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

$$\boxed{\text{FIGLI}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\text{Dim.}}: \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{Pongo } y = -x. \text{ Quando } x \rightarrow -\infty, \text{ ho che } y \rightarrow +\infty$$

$$\text{Ottengo: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)$$

dovei fare
 $z = y-1 \dots$

$\downarrow$
e

$\downarrow$
1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\underline{\text{Dim.}} \text{ Partiamo da } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\text{Pongo } \frac{1}{x} = y. \text{ Quando } x \rightarrow +\infty, \text{ ho che } y \rightarrow 0^+. \text{ Quindi}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e \quad \text{Faccio il logaritmo a dx e sx}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y) = \log e = 1.$$

Questo dimostra il limite voluto, ma solo per $y \rightarrow 0^+$. Per fare lo stesso limite per $y \rightarrow 0^-$, basta partire dal $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dim.: pongo $y = e^x - 1$. Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow e^0 - 1 = 0$
Inoltre $y+1 = e^x$, quindi $x = \log(1+y)$.

Ma allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0 \quad (\text{vero anche con esponenti positivi su } x \text{ e } \log x)$$

Dim.: pongo $y = \frac{1}{x}$. Quando $x \rightarrow 0^+$ ho che $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\log y}{y} = 0$$

perché a $+\infty$ i log perdono dalle potenze.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin x}{x}} \cdot \boxed{\frac{1}{\cos x}} = 1$$

↓ ↓
1 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Dim.: pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$, da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Analogamente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \quad \left[= \frac{\sin \pi}{0} = \frac{0}{0} \right]$

Pongo $y = x - \pi$. Quando $x \rightarrow \pi$ ho che $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1$$

Precorso: $\sin(y + \pi) = -\sin y$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{e^x - e} \quad \left[= \frac{\log 1}{e - e} = \frac{0}{0} \right]$

Pongo $y = x - 1$. Quando $x \rightarrow 1$ ho che $y \rightarrow 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{e^x - e} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{e^{1+y} - e} = \lim_{y \rightarrow 0} \boxed{\frac{\log(1+y)}{y}} \cdot \boxed{\frac{y}{e(e^y - 1)}} = \frac{1}{e}.$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1