

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 020

Titolo nota

08/10/2011

Aggiunta a limiti notevoli (NIPOTI): $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0$

CRITERIO FUNZIONI $\rightarrow$ SUCCESSIONI Utilizzo di limiti di funzioni per fare limiti di successioni: cambio di variabili tra funzioni e successioni.

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} \quad [= +\infty \cdot 0]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $x \rightarrow 0$.

Achtung! Questo si può fare tutte le volte che il limite di funzioni che si trova esiste e $\in \bar{\mathbb{R}}$.

Se il limite di funzioni non esiste, allora boh (non si può dire nulla del limite di successioni iniziale).

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (\sqrt[n]{7} - 1) \quad [= +\infty \cdot (1-1) = +\infty \cdot 0]$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{7} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x} = \log 7$$

$x = \frac{1}{n}$
 $x \rightarrow 0$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

Pongo $y = \log x$. Quando $x \rightarrow +\infty$ ho che $y \rightarrow +\infty$. Inoltre $x = e^y$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0 \text{ perché esponentiale batte potenza.}$$

Fatto generale: il logaritmo perde dalle potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\log n]^a}{n^b} = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(7+5^n)}{n+3} = \log 5$

Brutal mode: Numeratore $\sim \log 5^n = n \log 5$ Denominatore $\sim n$

Rigoroso: chi comanda si raccoglie

$$\begin{aligned} \frac{\log(7+5^n)}{n+3} &= \frac{\log[5^n(1+\frac{7}{5^n})]}{n(1+\frac{3}{n})} = \frac{n \log 5 + \log(1+\frac{7}{5^n})}{n(1+\frac{3}{n})} \\ &= \frac{\cancel{n}(\log 5 + \frac{\log(\quad)}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})} \rightarrow \frac{\log 1}{+\infty} = 0 \rightarrow \log 5. \end{aligned}$$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{n}-1)$ [= $+\infty \cdot (1-1)$]

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \text{Base ed esponente strano!}$$

$$A^B = e^{\log A^B} = e^{B \log A}$$

Quindi $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \log n}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \log n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}}$$

Pongo $x = \frac{\log n}{n}$

Quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$ perché potenza batte logaritmo.

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\tan x \cdot \log \left(\frac{x}{x^2+1} \right)}$

Posso limitarmi a fare il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \log \left(\frac{x}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \{ \log x - \log(x^2+1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \{ \tan x \cdot \log x - \tan x \cdot \log(x^2+1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{\frac{\tan x}{x}}_1 \cdot \underbrace{x \log x}_0 - \underbrace{\tan x}_0 \cdot \underbrace{\log(x^2+1)}_0 \right] = 0$$

L'esponente $\rightarrow 0$, quindi il limite iniziale è 1.

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]^{\frac{1}{\arctan(x^2)}}$ [= 1^{+\infty}]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\arctan(x^2)} \cdot \log(\cos x)}$$

Faccio il limite dell'esponente

$$\begin{aligned} \frac{\log(\cos x)}{\arctan(x^2)} &= \frac{x^2}{\arctan(x^2)} \cdot \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \\ &= \underbrace{\frac{x^2}{\arctan(x^2)}}_1 \cdot \underbrace{\frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}}_{\substack{y = \cos x - 1 \\ \text{FORTUNA: } y \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} \rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Visto che esponente $\rightarrow -\frac{1}{2}$, il limite iniziale è $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Esempio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \arctan x} - \cos x + \arcsin(\log(1+2\sin x))}{\arctan(x+x^2) - x^{20}} = 5$$

Raccoglie x sopra e sotto

Sotto: $x \left\{ \frac{\arctan(x+x^2)}{x+x^2} \cdot \frac{x+x^2}{x} - x^{19} \right\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 1 \quad 0$

Sopra: $x \left\{ \frac{e^{3 \arctan x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} + \frac{\arcsin(\log(1+2\sin x))}{x} \right\}$

$\downarrow$
 $\frac{e^{3 \arctan x} - 1}{3 \arctan x} \cdot \frac{3 \arctan x}{x} \rightarrow 3$

$\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$\frac{\arcsin(\log(1+2\sin x))}{\log(1+2\sin x)}$	$\frac{\log(1+2\sin x)}{2\sin x}$	$\frac{2\sin x}{x}$
$\downarrow$ 1	$\downarrow$ 1	$\downarrow$ 2