

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 019

Titolo nota

08/10/2011

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$.

Si dice che $f(x)$ è CONTINUA in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che $f(x)$ è CONTINUA in A se $f(x)$ è continua in ogni $x_0 \in A$.

Metateorema Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non presenta problemi burocratici (denominatori = 0, radici di roba < 0 , logaritmi di roba ≤ 0 , ...)

Esempio
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin x + \log_5(1 + \tan x)}{\cos(\arctan x)} = 3$$

Motivo: sostituendo $x=0$ non si incontra nessun problema e si ottiene 3,

Secondo strumento: i teoremi algebrici e i teoremi di confronto (a 2 e a 3) valgono per i limiti di funzioni esattamente come per i limiti di successioni.
Stesso discorso per i confronti di ordini di infinito.

Esempio
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x}{x}$$

Numeratore $\rightarrow -\frac{\pi}{2}$
Denominatore $\rightarrow -\infty$

$= \left[\frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} \right] = 0$ (volendo 0^+)

Esempio
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \sin\left(\frac{3x+2}{x^2}\right) \quad -1 \leq \sin(\text{Mostro}) \leq 1$$

Moltiplico per $\tan x$ (che è > 0 quando $x \rightarrow 0^+$)

$$-\tan x \leq \tan x \cdot \sin(\dots) \leq \tan x$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

LIMITI NOTEVOLI

Forme indeterminate classiche

PADRI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

FIGLI

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

NIPOTI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

↑
logaritmo in
base e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(3x)}{3x}} \cdot 3 = 3$

↓
1

Cambio di variabile nei limiti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$

Pongo $y = 3x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 3 \cdot 0 = 0$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^2 \rightarrow 1^2 = 1$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$

↑
Pongo $y = x^2$. Quando
 $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x}} \cdot \boxed{\frac{\arctan x}{x}}$

↓ ↓
1 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow \arctan 0 = 0$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}}$

$\downarrow y = \sin x$ $\downarrow$
 1 1

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x} = 0$

$-1 \leq \sin(\sin x) \leq 1$ Divido per x e cambio i versi perché $x \rightarrow -\infty$, quindi x è < 0

$$-\boxed{\frac{1}{x}} \geq \frac{\sin(\sin x)}{x} \geq \boxed{\frac{1}{x}}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\arctan(\cos x)}{\cos x}} \cdot \boxed{\frac{1}{\cos x}} = 1.$

$\downarrow 1$ $\downarrow 1$

NO!!! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$ (basta sostituire $x=0$)

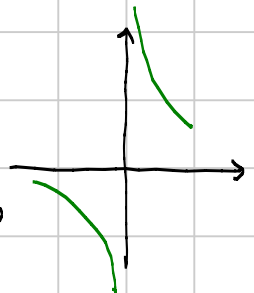
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x)}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow \textcircled{1}} \frac{\arctan y}{y} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow \cos 0 = \textcircled{1}$

Il limite iniziale fa $\frac{\pi}{4}$ (come posso vedere da subito con analisi preliminare: non era una forma indeterminata).

Esempio 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ N.E. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$



Fatto generale: se $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2 \in \bar{\mathbb{R}} \end{array} \right\}$ se $l_1 \neq l_2$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ N.E.

Achtung! Quando denominatore $\rightarrow 0$ e numeratore $\rightarrow$ numero $\neq 0$ bisogna controllare se il den $\rightarrow 0^+$ oppure 0^- .