

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 018

Titolo nota

08/10/2011

Limiti di funzione: definizioni

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\begin{aligned} &\nearrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ &\searrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{NON esiste} & \textcircled{4} \end{cases}$$

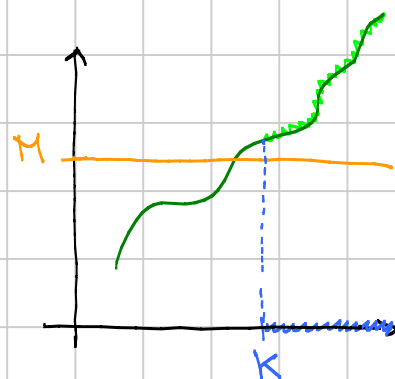
Def. di ④: Nessuno dei precedenti

Def. di ②: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \geq K$$

$\uparrow$ dipende da M : più M è grande, più bisognerà usare K grandi

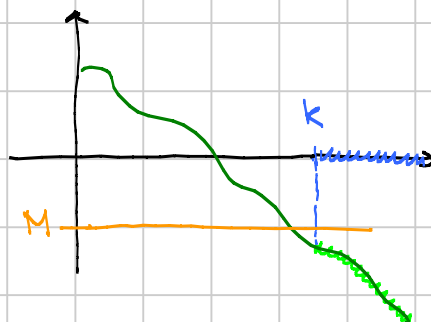


Def. di ③: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \geq K$$

$\uparrow$ dipende da M



Def. di ①: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq K$$

(equivalentemente $|f(x) - l| \leq \varepsilon$)

$\uparrow$ distanza tra $f(x)$ ed l



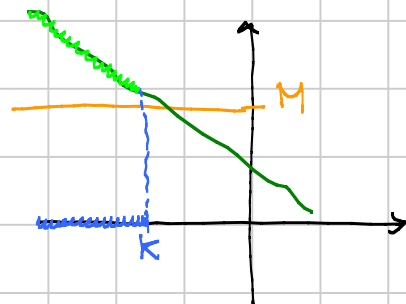
10101

$$x \rightarrow \infty$$
 $x \rightarrow -\infty$

(anche enorme)

b.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in K$

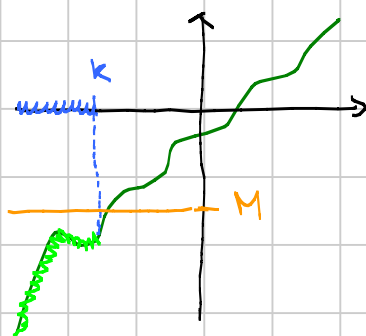
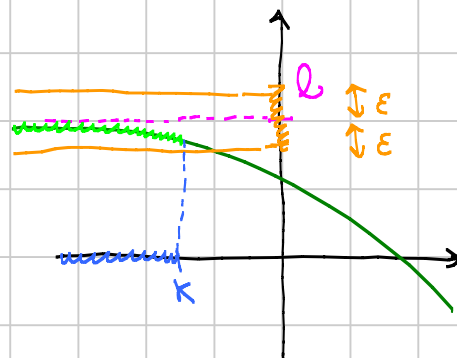
↓ dipende da M : più M è grande più K sarà molto negativo.


$$x \rightarrow -\infty$$

(anche molto negativo)

b.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \leq K$

↓ dipende da M : più M è grande più K sarà molto negativo.


$$x \rightarrow 0$$
 $\forall \varepsilon > 0$
$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \leq K$$
$$(\text{opp. } |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$


Sia ora $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \nearrow l \in \mathbb{R} \\ \rightarrow +\infty \\ \searrow -\infty \\ \searrow \text{non esistere} \end{cases}$

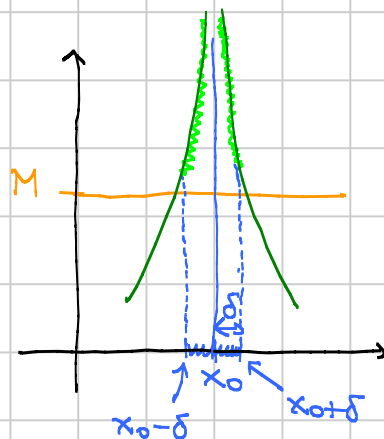
- ①
- ②
- ③
- ④

Def. di ④ : Nessuno dei precedenti

Def. di ② : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$$\exists \delta > 0 \text{ b.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

dipende da M : più M è grande, più δ sarà vicino a 0

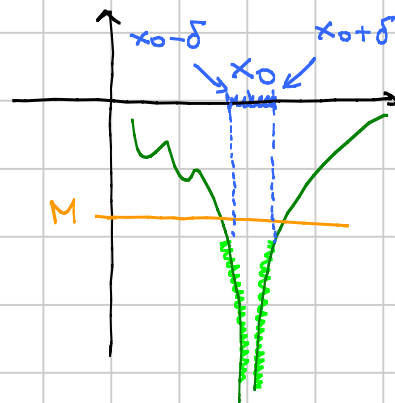


Oss. Il limite se ne frega del valore di f in x_0 ; $f(x)$ potrebbe anche non essere definita per $x = x_0$.

Def. di ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



Oss. Si intende, quando faccio il limite per $x \rightarrow x_0$, che $f(x)$ è definita almeno "dalle parti di x_0 ". In x_0 però potrebbe essere non definita.

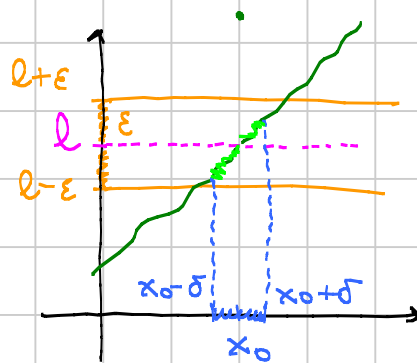
Def. di ① $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ (anche molto vicino a 0)}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

— 0 — 0 —



$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ Stesse definizioni di sopra, ma la disuguaglianza per $f(x)$ deve valere $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$

intervallo destro di x_0

di ampiezza δ , tutto x_0

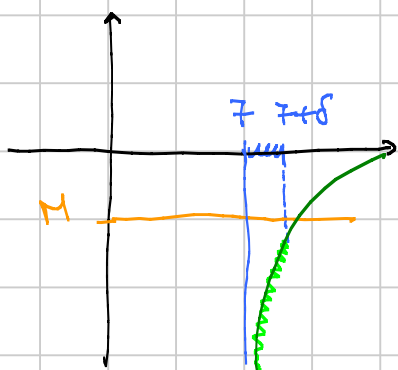
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ — — — $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$.
— 0 — 0 —

Adattamenti della definizione

$$\lim_{x \rightarrow \tau^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$$

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in (\tau, \tau + \delta]$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \tau^+$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \tau < f(x) \leq \tau + \varepsilon \quad \forall x \leq K, \\ (0 < f(x) - \tau \leq \varepsilon)$$