

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 017

Titolo nota

07/10/2011

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^{100}} = +\infty$

Applico criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{(n+1)^2}}{[(n+1)!]^{100}} \cdot \frac{[n!]^{100}}{3^{n^2}} = \frac{3^{n^2+2n+1}}{(n+1)^{100} \cdot [n!]^{100}} \cdot \frac{[n!]^{100}}{3^{n^2}} = \\ &= \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^{100}} = \frac{3 \cdot 3^{2n}}{[n(1+\frac{1}{n})]^{100}} = \frac{3 \cdot 9^n}{n^{100} \cdot (1+\frac{1}{n})^{100}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$.

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$

Criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(2n+2)(2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0 < 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow 0$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}$

lo scrivo come $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$. Ora applico il criterio rapporto $\rightarrow$ radice

con $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 (n+1)^{2n}} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}} \\
 &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} \\
 &= \boxed{\frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}} \cdot \boxed{\frac{1}{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^2}} \rightarrow \frac{4}{e^2}
 \end{aligned}$$

$\downarrow 4$
 $\downarrow \frac{1}{e^2}$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{4}{e^2}$, abbiamo che $\sqrt[n]{a_n} = \text{limite iniziale} = \frac{4}{e^2}$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n! + 8^n}{20^n + 7n!} = \frac{2}{7}$

Raccordo $n!$ sopra e sotto --.

$$\frac{\cancel{n!} \left(2 + \frac{8^n}{n!}\right)}{\cancel{n!} \left(\frac{20^n}{n!} + 7\right)} \rightarrow \frac{2}{7} \quad (\text{fattoriali battono esponenziali})$$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)! + 8^n}{20^n + 7n!}$

Raccordo $(2n)!$ sopra e $n!$ sotto

$$\frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{1 + \boxed{\frac{8^n}{(2n)!}}}{\boxed{\frac{20^n}{n!}} + 7}$$

$\nearrow 0$
 $\downarrow 0$

Da parte calcolo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n!}$

Questo si può fare con il rapporto, oppure osservando che $(2n)! \geq (n+1)!$, da cui

$$\boxed{\frac{(2n)!}{n!}} \geq \frac{(n+1)!}{n!} = \boxed{(n+1)} \quad \text{per confronto a 2.}$$

$\downarrow +\infty$
 $\rightarrow +\infty$

Osservazione $(3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$

Esempio 6

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}}_{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$$

$$a_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{4} ; \quad a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} ; \quad a_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} ; \dots$$

Errore classico: dire che il limite è 0 perché tutti gli addendi tendono a 0.

Procedimento corretto: intanto $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$a_n \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\substack{\text{termine +} \\ \text{grande della somma}}} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\text{numero dei termini}}$$

Quindi

$$\underbrace{0}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{a_n}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{\frac{n+1}{n^2}}_{\downarrow 0}$$

Esempio 7

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{a_n} . \quad \text{È ancora vero che i termini} \\ \text{singolarmente tendono a 0.}$$

Però

$$\underbrace{a_n}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1)}_{\downarrow +\infty} \quad [\text{termine + piccolo. numero termini}]$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{2n}} = \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{n}}_{\downarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\downarrow 0} \rightarrow +\infty$$

Achtung! Posso dire che il limite della somma è la somma dei limiti quando il numero di addendi è fisso.

Nei due esempi precedenti

→ il singolo termine tende a 0

→ il numero dei termini tende a $+\infty$

In un certo senso si tratta di forme indefinite di tipo $0 \cdot (+\infty)$

— 0 — $+\infty$ —

Esercizio Funzioni pari / dispari

$$f(x) = \cos(x^3)$$

$$f(-x) = \cos((-x)^3) = \cos(-x^3) = \cos(x^3) = f(x) \quad \text{PARI}$$

$$f(x) = \cos^3(x) = [\cos x]^3$$

$$f(-x) = [\cos(-x)]^3 = [\cos x]^3 = f(x) \quad \text{PARI}$$

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

$$f(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -f(x) \quad \text{DISPARI}$$

$$f(x) = \cos(\sin x)$$

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x) \quad \text{PARI}$$

Quali delle 4 funzioni precedenti sono periodiche?

La 2^a, 3^a, 4^a sì, perché se cambio x con $(x+2\pi)$ la prima funzione trigonometrica che incontro annulla la differenza

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

Invece $\cos(x^3)$ NON è periodica !!! Dove vale $\cos(x^3) = 1$?

Dove $x^3 = 2k\pi$, cioè dove $x = \sqrt[3]{2k\pi}$ e questi p.ti non sono disposti ad intervalli regolari

$\cos x^3$: oscillazioni sempre più ravvicinate !!

