

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 016

Titolo nota

07/10/2011

Confronti tra ordini di infinito

Numero e (numero di NEPERO) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7\dots$

Lezione successiva: dimostrazione che il limite esiste ed è compreso tra 2 e 3.

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^3} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

1° modo: criterio del rapporto con $a_n = \frac{2^n}{n^3}$. Provo a fare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \rightarrow 2$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l = 2 > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$

2° modo: criterio della radice con $a_n = \frac{2^n}{n^3}$. Provo a fare

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{2}{\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n}}\right)^3} \rightarrow 2 \quad (\text{come era ampiamente prevedibile dal rapporto} \rightarrow \text{radice})$$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l = 2 > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$.

Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \forall a > 1, \forall b \in \mathbb{R}$$

Esponenziale batte potenza

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{300^n}{n!} \quad a_n$

$$1^\circ \text{ modo: criterio della radice: } \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{300^n}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{300}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0 < 1$, anche $a_n \rightarrow 0$.

$\downarrow$
 $+\infty$

2° modo: criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{300^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{300^n}{n!}} = \frac{300^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{300^n} = 300 \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{300}{n+1} \rightarrow 0$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l = 0 < 1$, anche $a_n \rightarrow 0$.

Fatto generale: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \geq 1$ Fattoriale batte esponenziale (e anche le potenze)

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n + n^4 + 8}$

Qui comanda si raccoglie, e comanda 7^n :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{3^n + 7^n + n^4 + 8} &= \sqrt[n]{7^n \left(\frac{3^n}{7^n} + 1 + \frac{n^4}{7^n} + \frac{8}{7^n} \right)} \\ &= 7 \cdot \left\{ \left(\frac{3}{7} \right)^n + 1 + \frac{n^4}{7^n} + \frac{8}{7^n} \right\}^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

(espon. con base < 1)
(espon. batte potenza)
(perché $\frac{8}{+\infty}$)

$1^0 = 1 \rightarrow 7$

Esempio 4 $\sqrt[n]{3n! + 3^n + \cos(n!)} = +\infty$

Comanda $n!$ dentro la radice: basta raccogliere $n!$

$$\sqrt[n]{n!} \left\{ 3 + \frac{3^n}{n!} + \frac{\cos(n!)}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} \rightarrow +\infty$$

$+\infty$
 $3^0 = 1$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n - 8^n + n^8 - n^{20} = +\infty$

Raccolgo 10^n : $10^n \left\{ 1 - \left(\frac{8}{10} \right)^n + \frac{n^8}{10^n} - \frac{n^{20}}{10^n} \right\} \rightarrow +\infty$

$\downarrow$
 $\downarrow$
 $\downarrow$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{n^n}{n!}}_{a_n} = +\infty$

Applico criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l = e = 2,718... > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 7 (Achtung!) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{3^{n^2}}{n!}}_{a_n} = +\infty$

Applico criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{n^2}} = \frac{3^{n^2+2n+1}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{3^{n^2}} = \frac{3^{2n+1}}{n+1} = \frac{3 \cdot 9^n}{n+1} \rightarrow +\infty$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty > 1$, per il criterio del rapporto abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$

Achtung! L'esponenziale con esponente n perde dal fattoriale, l'esponenziale con esponente n^2 batte il fattoriale.

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ [$\frac{+\infty}{+\infty}$: forma indeterminata]

Idea: $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}_{a_n}$ Ora applichiamo il rapporto $\rightarrow$ radice

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$, abbiamo che $a_n \rightarrow 0$ (che già sapevamo), ma anche $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$