

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 015

Titolo nota

07/10/2011

3 criteri : $\rightarrow$ criterio della RADICE
 $\rightarrow$ criterio del RAPPORTO
 $\rightarrow$ criterio RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE

} Confronti tra ordini di infinito

CRITERIO DELLA RADICE Sia a_n una succ. tale che $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora

- se $l > 1$ (compreso il caso $l = +\infty$), allora $a_n \rightarrow +\infty$
- se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$
- se $l = 1$, allora BOH, cioè non posso dire nulla di a_n .

Operativamente : $\rightarrow$ devo fare il limite di una succ. a_n e non lo so fare
 $\rightarrow$ provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ (dopo aver controllato che sia $a_n \geq 0$)
 $\rightarrow$ se questo limite esiste ed è $\neq 1$, allora conosco il limite di a_n ,
 $\rightarrow$ se questo limite è $= 1$ oppure non esiste, allora devo cercare un altro strumento.

CRITERIO DEL RAPPORTO Sia a_n una succ. tale che $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$\downarrow$
rapporto tra 2 termini consecutivi della succ.

Allora ho le stesse conclusioni del criterio della radice.

Oss. Gli l del criterio del rapporto e della radice sono per forza ≥ 0 .

CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE

Sia a_n una succ. tale che $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ (stesso limite).

Oss. Se va male il criterio del rapporto perché il limite tende ad $\pm$, allora va male anche il criterio della radice (tenete a $\pm$ pure lei). Se va male il criterio della radice, allora va male anche il rapporto. Infatti, se il rapporto avesse un limite $\neq \pm$, anche la radice dovrebbe avere lo stesso limite $\neq \pm$.

Oss. Ci sono esempi in cui il rapporto non ha limite, ma la radice sì. Ovviamente non ci sono esempi in cui entrambi hanno limite e questi limiti sono diversi.

— o — o —

Dim. criterio radice Ci sono due casi

Caso 1. Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$ Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

Facciamo il caso in cui l è reale (il caso in cui $l = +\infty$ è più semplice).

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora sicuramente

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2} \quad \text{definitivamente}$$

Ora elevo tutto alla n (conservando i versi perché ...). Ottengo

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

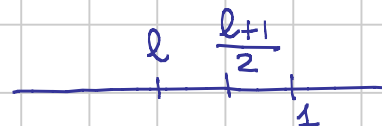
per confronto a 2

$\rightarrow +\infty$ perché esponenziale con base > 1

Nel caso $l = +\infty$ basta dire che $\sqrt[n]{a_n} \geq 1.5$ definitivamente e procedere come sopra.

Caso 2 Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$ Tesi: $a_n \rightarrow 0$

Perché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora



$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitivamente. Elevando alla n ottengo

$$\boxed{0} \leq \underbrace{a_n}_{\substack{\text{per i carabinierei} \\ \downarrow 0}} \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\substack{\text{esponenziale con base in } [0,1) \\ \downarrow 0}}$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2}$

Con i teoremi algebrici $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2^0 = 1$

Disuguaglianza di Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Pongo $x = \frac{1}{n}$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

Estraggo la radice n -esima a dx e sx (e conservo i versi perché...)

$$\underbrace{1}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\downarrow 1} \quad (\sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{1} = 1)$$

Fatto generale:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ per ogni } a > 0} \rightarrow \text{Tabellina}$$

Dim. Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$ e ottengo $\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{a-1}{n} = a$

quindi facendo la radice n -esima: $\sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$

Ora se $a \geq 1$ ho che

$$\underbrace{1}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{1+\frac{a-1}{n}}_{\downarrow 1}$$

Se invece $a < 1$, lo scrivo come $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ e

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

Esempio 1 Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ (occhio: non rientra nel caso precedente, in cui l'argomento della radice era fisso)

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow (+\infty)^0$ che è indeterminata, quindi NON segue dai teoremi algebrici.

Applico il criterio rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n$
(se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$, allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}} \rightarrow 1. \text{ Ma allora } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2 + 7}$ $[(n^2 + 7)^{\frac{1}{n}} \rightarrow (+\infty)^0]$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n^2 + 7$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + 7}{n^2 + 7} = \frac{n^2 + 2n + 1 + 7}{n^2 + 7} = \dots \rightarrow 1$$

Ma allora anche $\sqrt[n]{n^2 + 7} \rightarrow 1$

Metodo alternativo: raccolgo n^2 subito e mi riconduco all'esempio 1

$$\sqrt[n]{n^2 + 7} = \sqrt[n]{n^2 \left(1 + \frac{7}{n^2}\right)} = \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{7}{n^2}} = \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\downarrow 1^2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\downarrow 1^0} \rightarrow 1$$

Fatto generale: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1$ per ogni polinomio che sia ≥ 0 definitivamente.

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \rightarrow +\infty. \text{ Allora anche } \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$$

perché stesso limite.