

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 014

Titolo nota

06/10/2011

Teoremi algebrici per limiti di successioni Siano a_n e b_n 2 successioni.
Supponiamo che

$$a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

(questo vuol dire che a_n e b_n sono di tipo ①, ② o ③).

Allora

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2} \quad (\text{si intende che le operazioni sono estese a } \bar{\mathbb{R}})$$

TRANNE in alcuni casi speciali cioè

- nelle 7 forme indeeterminate

$$\underbrace{+\infty - \infty}_{\text{somma e diff.}}, \underbrace{0 \cdot (\pm\infty)}_{\text{prodotto}}, \underbrace{\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}}_{\text{quoziente}}, \underbrace{0^0, (\pm\infty)^0, 1^{(\pm\infty)}}_{\text{esponenziali}}$$

- quando nel quoziente il denominatore tende a 0 (e qui dipende se è 0^+ , 0^- , o nessuno dei due).

Achtung! I teoremi algebrici non dicono nulla nel caso in cui uno dei 2 limiti (di a_n o b_n) non esista.

Talvolta servono ipotesi per dare senso ai quozienti ($b_n \neq 0$ definitivamente) o agli esponenziali ($a_n > 0$ definit.).

Achtung! Achtung! Forma indeeterminata vuol dire che non posso prevedere il limite di quella operazione (somma, prodotto, ...) sulla base solo dei limiti delle 2 componenti.

NON vuol dire che la successione risultante sia indeeterminata, Vuol dire solo che va esaminata caso per caso.

Esempio 1 $a_n = \underbrace{n^3}_{\downarrow +\infty} + \underbrace{n^2}_{\downarrow +\infty} \rightarrow +\infty$ per il te. algebrico

Esempio 2 $a_n = \underbrace{n^3}_{+\infty} - \underbrace{n^2}_{-\infty}$: forma indeterminata
 $= \underbrace{n^2}_{\downarrow +\infty} (\underbrace{n-1}_{+\infty}) \rightarrow +\infty$
 $= +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

Esempio 3 $a_n = \underbrace{\sqrt{n}}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\downarrow 0} \rightarrow +\infty$
 $= +\infty - 0 = +\infty$

Esempio 4 $a_n = 2^n$ Perché $a_n \rightarrow +\infty$? Volendo per te. alg. con l'esponenziale

Si può usare che $\underbrace{2^n}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{n+1}_{\downarrow +\infty}$ (dimostrato per induzione)

Poiché $n+1 \rightarrow +\infty$, si ha che $2^n \rightarrow +\infty$ per confronto

Fatto generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \quad \forall a > 1$ → Tabellina

Dim.: $a^n = [1 + (a-1)]^n \geq 1 + (a-1)n$
 $\downarrow$
 uso che $(1+x)^n \geq 1 + nx$
 con $x = a-1$ (Bernoulli)

Se $a > 1$ ho che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a-1) \cdot n = \text{numero pos.} \cdot +\infty = +\infty$.
 Ma allora per confronto a 2 anche $a^n \rightarrow +\infty$.

Altro fatto generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad \forall a \in (0, 1)$
 e anche $\forall a \in (-1, 1)$

Dim.: se $a \in (0, 1)$ posso scriverlo nella forma $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$, quindi

$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \left[= \frac{1}{+\infty} \right] \rightarrow 0,$

Achtung!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$$

Occhio: la successione 1^n è
la succ. costante $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ Perché?

Intanto $-1 \leq \sin n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Divido per n . Essendo $n > 0$ (definitivamente) conservo i versi

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \boxed{\frac{\sin n}{n}} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

I due laterali tendono a 0 perché sono in tabellina (potenze di n con esponente negativo), quindi per i carabinieri anche il centrale tende a 0.

Esempio 6 $a_n = \boxed{n} - \boxed{\sin n}$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $+\infty \quad \quad \text{Both}$

Due modi per uscire:

$$\boxed{n - \sin n} \geq \boxed{n - 1}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $+\infty \quad \quad \downarrow +\infty \text{ per teo. algebrici}$
per confronto a 2

2° modo: raccolgo n :

$$a_n = \boxed{n} \left(1 - \frac{\sin n}{n} \right) = [+\infty (1 - 0) = +\infty]$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $+\infty \quad \quad 0 : \text{ fatto prima}$

Esempio 7 $a_n = \frac{n^3 - 3n^2}{n - 6n^3 + 2} \rightarrow -\frac{1}{6}$

Le potenze + grandi comandano, chi comanda si raccoglie, il resto sono teoremi algebrici

$$a_n = \frac{\cancel{n^3} \left(1 - \frac{3}{n} \right)}{\cancel{n^3} \left(\frac{1}{n^2} - 6 + \frac{2}{n^3} \right)} \rightarrow \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(2^n + n!)}{n^2 + 3} = 0$

Infatti $0 \leq \arctan(2^n + n!) \leq 123$ (in realtà anche di $\frac{\pi}{2}$)

Divido per $n^2 + 3$, che è > 0 quindi non cambia i versi

$$\boxed{0} \leq \frac{\arctan(2^n + n!)}{n^2 + 3} \leq \frac{123}{n^2 + 3}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0
 per i carabinieri

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{n + 4} = \left[\frac{+\infty - \infty}{+\infty} \right]$

Sopra comanda $\sqrt{n}$, sotto comanda n . Raccolgo:

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{n + 4} = \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{n \left(1 + \frac{4}{n}\right)}$$

$$= \frac{\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \rightarrow 0}{1 + \boxed{\frac{4}{n}} \rightarrow 0} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

Esempio 10 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-|3n - n^2| + n^2}{5n + 2}$

L'argomento del valore assoluto è $3n - n^2$, che tende a $-\infty$, quindi definitivamente è < 0 per permanenza del segno.

Quindi definitivamente $|3n - n^2| = n^2 - 3n$ (val. ass. di roba < 0).

Quindi definitivamente

$$\frac{-|3n - n^2| + n^2}{5n + 2} = \frac{-\cancel{n^2} + 3n + \cancel{n^2}}{5n + 2} \rightarrow \frac{3}{5} \quad (\text{solito raccoglimento}).$$

— 0 — 0 —