

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 013

Titolo nota

06/10/2011

Fattoriali e coefficienti binomiali

Definizione ricorsiva di fattoriale

$$\bullet 0! = 1$$

$$\bullet (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Detto con i punti $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ se $n \geq 1$

Significato combinatorio. Dati n oggetti diversi, $n!$ rappresenta il numero di modi di ordinarli.

Esempio: date n persone, in quanti modi possiamo formare una fila?

Risposta: $n!$. Perché?

Il primo possiamo scegliere in n modi

il 2° " " " $n-1$ modi (uno qualunque dei rest.)

il 3° " " " $n-2$ " "

e così via.

Le possibilità si moltiplicano perché sono scelte indipendenti.

Esempio Con $n=3$ e 3 persone A, B, C

A ↗ AB → ABC
A ↘ AC → ACB

B ↗ BA → BAC
B ↘ BC → BCA

C ↗ CA → CAB
C ↘ CB → CBA

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Definizione di Coefficiente binomiale. Dati 2 interi $0 \leq k \leq n$, si pone

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

si legge

"n su k"

k fattori
al num.

Esempio $k=2$ $n=5$ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{(2 \cdot 1) (\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1})} = \frac{5 \cdot 4}{2!}$

$k=4$ $n=81$ $\binom{81}{4} = \frac{81!}{4! \cdot 77!} = \frac{81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78}{4!}$

Significato combinatorio. Dato un gruppo di n persone, vogliamo scegliere un commando di k persone. In quanti modi possiamo farlo?

Risposta: in $\binom{n}{k}$ modi. Perché?

Il 1° posso sceglierlo in n modi

il 2° " " " $(n-1)$ modi

il 3° " " " $(n-2)$ modi

!

il k -esimo " " " $(n-k+1)$ modi

Ora devo tenere conto che lo stesso commando di k persone può essere stato scelto in tanti modi diversi, a seconda dell'ordine in cui ho scelto le k persone. Quindi ogni commando può essere scelto in $k!$ modi diversi, dunque devo dividere per $k!$. Ottengo così

$$\text{numero modi} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Anagrammi Quanti sono gli anagrammi di una data parola?

PARCO : si tratta di riordinare ("mettere in fila") 5 lettere, quindi ho 5! possibilità $5! = 120$

PORCO : il problema è che c'è una lettera ripetuta

PORCO, PORCO sono distinti nel conto dei 5!, ma sono lo stesso anagramma. Ogni anagramma è contato 2 volte nei 120, quindi devo dividere per 2 : $\frac{120}{2} = 60$.

MATEMATICA : 10 lettere, con 2 M, 2 T, 3 A. Ora devo

- dividere per 2 per colpa delle 2 M,
- dividere di nuovo per 2 per colpa delle 2 T,

- dividere per $3! = 6$ per cada delle 3A perché 3A colorate diversamente possono comparire in 6 modi diversi.

Risposta :
$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$$

In generale si divide per i fattoriali di tutte le lettere ripetute.

BIOMEDICA

$$\frac{9!}{2!}$$

— o — o —

Proprietà dei binomiali

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$

C'è un solo modo di scegliere tutti o nessuno in un gruppo di n .

- $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$ ci sono n modi di scegliere una persona in un gruppo di n

- $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n$ Invece di scegliere le $n-1$ persone da prendere, faccio prima a scegliere la persona da escludere

- Simmetria dei binomiali : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Algebricamente : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$ $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$

Dal p.to di vista combinatorio : scegliere le k persone da prendere è equivalente a scegliere le $n-k$ persone da escludere.

- Generazione ricorsiva : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

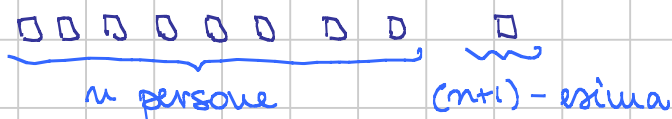
Dim. algebrica : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} =$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) k! (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \left\{ \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right\} = \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{\cancel{k+1} + n - \cancel{k}}{(n-k)(k+1)}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Verifica combinatoria Devo scegliere $(k+1)$ persone in un gruppo di $(n+1)$. Isolo l' $(n+1)$ -esima persona



Ora ho 2 possibilità:

- scelgo $(k+1)$ -persone tra le prime $n \rightarrow \binom{n}{k+1}$ modi
- scelgo k persone tra i primi n e poi aggiungo l' $(n+1)$ -esimo
 $\rightarrow \binom{n}{k}$

— o — o —

I coefficienti binomiali sono i numeri che compaiono nel triangolo di TARTAGLIA (o triangolo di PASCAL).

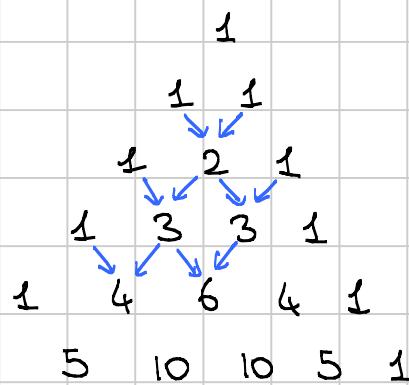
Ci sono 1 ai lati e ogni numero è la somma dei 2 che stanno sopra.

riga 0

riga 1

riga 2

riga 3



Fatto: i numeri della riga n sono i

binomiali $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$

Dim: ai lati c'è $1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ + generazione ricorsiva.

Sviluppando il binomio $(x+y)^n$ compaiono tutti monomi del tipo $x^k y^{n-k}$ (di grado n) con coefficiente $\binom{n}{k}$. In formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Binomio di NEWTON

Esempio $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Fatto generale: la somma della riga n -esima del triangolo di Tartaglia è 2^n (esercizio: dimostrarlo col binomio di Newton ed in modo combinatorio).