

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 012

Titolo nota

05/10/2011

Esempio 1 $a_n = n^2$ Dimostriamo che $a_n \rightarrow +\infty$.

Devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ ho che $n^2 \geq M$ definitivamente.

Ci sono 2 casi:

- se $M < 0$, allora $n^2 \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora $n^2 \geq M$ se e solo se $n \geq \sqrt{M}$ (perché $n \geq 0$), il che è vero definitivamente.

Esempio 2 $a_n = \sqrt{n}$ Dimostriamo che $a_n \rightarrow +\infty$.

Devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ ho che $\sqrt{n} \geq M$ definitivamente.

Ci sono 2 casi:

- se $M < 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ sempre, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ se e solo se $n \geq M^2$, il che è vero definitivamente (più M è grande, e più il definitivamente inizia dopo)

Fatto generale Se $a_n = n^\alpha$, con $\alpha > 0$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ (stessa dim.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty \quad \forall \alpha > 0$$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$. Lo dimostriamo usando la definizione.

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitivamente
 $l < a_n \leq l + \varepsilon$ con $l = 0$

Considero le 2 disuguaglianze:

- $0 < \frac{1}{n}$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente
- $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ è vera se e solo se $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, il che è vero definitivamente.

Oss. $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 \leq n\varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$
 $\uparrow$ moltiplico per n che definitivamente è > 0
 $\uparrow$ divido per ε che so essere > 0 .

Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0 \quad \forall a < 0$$

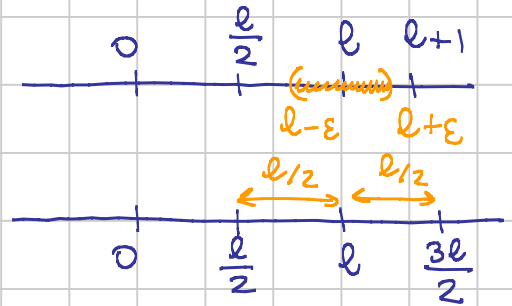
Permanenza del segno e discorsi affini

Supponiamo che $a_n \rightarrow l > 0$. Allora $a_n > 0$ definitivamente

Dim.: Uso la definizione di limite con un valore $\varepsilon = \frac{l}{2}$.

Allora ho che

$$0 < \frac{l}{2} \leq a_n \leq \frac{3l}{2} \text{ definitivamente.}$$

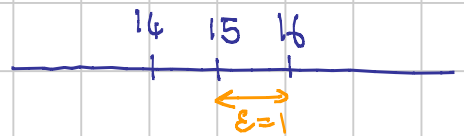


In particolare $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $a_n \rightarrow 15$. Allora $a_n \geq 14$ definitivamente.

Dim. Uso la definizione di limite con $\varepsilon = 1$ e ho che

$$14 \leq a_n \leq 16 \text{ definitivamente}$$



Supponiamo che $a_n \rightarrow -\infty$. Allora $a_n \leq -2011$ definitivamente.

Dim. Basta prendere $M = -2011$ nella definizione di limite.

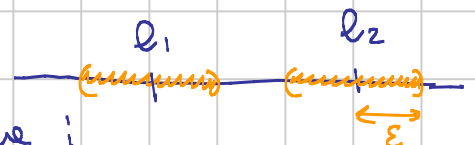
Unicità del limite Una successione ha sempre uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④.

Inoltre, se a_n è di tipo ①, esiste un unico $l \in \mathbb{R}$ per cui $a_n \rightarrow l$.

"Dim": se $a_n \rightarrow l_1$ e $a_n \rightarrow l_2$,

Basta prendere ε abbastanza piccolo in modo che i

2 intervallini in cui a_n deve stare definitivamente siano disgiunti.



STRUMENTI PER IL CALCOLO DI LIMITI: permettono di calcolare i limiti senza dovere usare la definizione.

→ Teoremi di confronto

→ Teoremi algebrici

Teorema di confronto (confronto a 2)

Siano a_n e b_n 2 successioni. Supponiamo che

$$a_n \geq b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora

- se $b_n \rightarrow +\infty$, allora anche $a_n \rightarrow +\infty$
- se $a_n \rightarrow -\infty$, allora anche $b_n \rightarrow -\infty$

Teorema dei carabinieri (confronto a 3)

Siano a_n, b_n, c_n 3 successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente.

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ e $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (stesso l).

Allora anche $b_n \rightarrow l$ (stesso l).

Oss. Il teorema dei carabinieri dice in particolare che b_n è di tipo ①.

Achtung! Nel teorema di confronto a 2 le tesi non scritte sono in genere false. Supponiamo per esempio che

$$a_n \geq b_n \quad \text{definitivamente.}$$

Supponiamo che $a_n \rightarrow 12$.

Cosa posso dire di b_n ?

- Non può andare a $+\infty$ $b_n \not\rightarrow +\infty$ ^{NO}
- Non può andare ad un limite > 12
- Può tendere a $-\infty$, tendere ad un numero reale $l \leq 12$, oppure può non avere limite.

Achtung! Supponiamo che $a_n \geq b_n$ definitivamente.
 Supponiamo che $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$.
 Allora $l_1 \geq l_2$.
 Supponiamo invece che $a_n > b_n$ definitivamente.
 Posso concludere che $l_1 > l_2$?

ASSOLUTAMENTE NO !!!

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

Esempio Sia $a_n = \frac{2}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Allora per ogni $n \geq 1$ si ha che $a_n > b_n$. Tuttavia $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$.

Quindi sapendo che $a_n > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$, $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$ posso solo dire che $l_1 \geq l_2$.

Retta reale estesa $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Se scrivo $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, riunifico i casi ①, ②, ③ nella stessa scrittura,

Le operazioni di somma e prodotto si estendono parzialmente a $\bar{\mathbb{R}}$

Esempi

$12 + (+\infty) = +\infty$	$12 \cdot (+\infty) = +\infty$
$12 + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
$-7 \cdot (-\infty) = +\infty$	$\frac{-7}{+\infty} = 0$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$+\infty + (-\infty) = \text{BOH}$$

$$0 \cdot (-\infty) = \text{BOH}$$