

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 011

Titolo nota

05/10/2011

LIMITI DI SUCCESSIONI

Def. Sia P_n una proprietà con un parametro $n \in \mathbb{N}$. Si dice che P_n è vera

- **DEFINITIVAMENTE** se P_n è vera da un certo p.to in poi, cioè se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. P_n è vera $\forall n \geq n_0$;
- **FREQUENTEMENTE** se P_n è vera per infiniti valori di n .

Esempi $n^2 \geq 70$ vera definitivamente perché vera per ogni $n \geq 9 = n_0$
è anche vera frequentemente

(in generale: vera definitivamente $\Rightarrow$ vera frequentemente, ma non viceversa)

$(-2)^n \geq 70$ vera frequentemente (per tutti gli n pari ≥ 8)
ma non definitivamente

$(-2)^n \geq 70$ è falsa frequentemente (per tutti gli n dispari)
— 0 — 0 —

Definizione di successione. Buocaticamente una successione è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (in portenza c'è $\mathbb{N}$). Questo vorrebbe dire che $f(n)$ è definito per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo modo $f(n) = \frac{1}{n}$ non sarebbe una succ., perché non è definita per $n=0$.

Più elasticamente, si accettano come successioni tutte le funzioni definite anche non per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma almeno definitivamente. Di conseguenza l'espressione può non essere definita per un numero finito di valori.

Notazione: sempre si abbrevia $f(n)$ con f_n .

Esempi $a_n = \frac{1}{n-70}$

↓
sempre ok $\forall n \geq 71$,
quindi è una succ.

$b_n = \sqrt{n-70}$

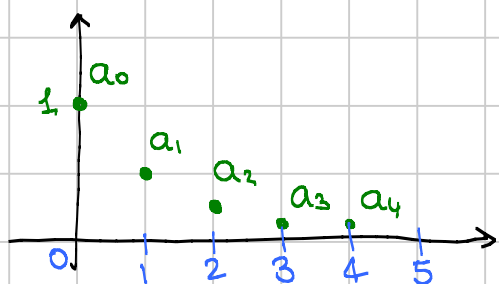
↓
sempre ok $\forall n \geq 70$
quindi è una succ.

$c_n = \sqrt{3000-n}$

↓
ok fino a 3000, poi
NO, quindi non è
una successione

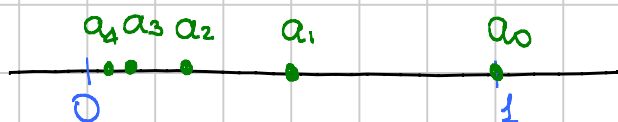
Come rappresentare una successione? Voglio visualizzare $a_n = \frac{1}{2^n}$

1° modo Punti nel piano cartesiano: disegno i p.ti $(n, \frac{1}{2^n})$



$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$$

2° modo Punti su una retta



3° modo "Lampadine". Pensiamo alla retta (come nel secondo modo)

Ogni secondo si accende una lampadina che resta accesa 1 sec.

La lampadina si accende prima in a_0 , poi in a_1 , poi in a_2 , ...

— o — o —

Definizione di limite Una successione ha 4 possibilità

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$
"limite per n che tende a
 $+\infty$ di a_n uguale ad l "

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
" a_n tende ad l "

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

$a_n \rightarrow +\infty$

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

$a_n \rightarrow -\infty$

④ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ non esiste

a_n è indeterminata oppure
 a_n non ha limite

Il caso ① presenta tre sottocasi:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+$ $a_n \rightarrow l^+$ (a_n tende ad l da destra)
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^-$ $a_n \rightarrow l^-$ " " " " " sinistra
- nessuno dei precedenti

Esempi

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

$$a_n \rightarrow 0, \text{ anzi } a_n \rightarrow 0^+$$

$$b_n = n^2$$

$$b_n \rightarrow +\infty$$

$$c_n = -n^3$$

$$c_n \rightarrow -\infty$$

$$d_n = (-1)^n : 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \quad d_n \text{ non ha limite.}$$

— 0 — 0 —

Definizioni di limite

Def. di ④ Nessuno dei precedenti

Def. di ② Si dice che $a_n \rightarrow +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

si ha che $a_n \geq M$ definitivamente

(cioè $a_n \geq M$ da un certo n_0 in poi. Ovviamente
non dipende da M)



Def. di ③ Si dice che $a_n \rightarrow -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)

si ha che $a_n \leq M$ definitivamente

(cioè $\forall M \in \mathbb{R} \exists \boxed{n_0} \in \mathbb{N}$ b.c. $a_n \leq M \quad \forall n \geq n_0$)

↓ dipende da M .

Def. di ① Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

si ha che $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente



In particolare, si ha che $a_n \rightarrow l^+$ se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $l < a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente

mentre si ha che $a_n \rightarrow l^-$ se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $l - \varepsilon \leq a_n < l$ definitivamente.

— 0 — 0 —

Luoghi comuni da sfatare

① Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora a_n è definitivamente crescente.

Esempio: $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, \dots$

② Se $a_n \rightarrow 0$, allora o $a_n \rightarrow 0^+$, o $a_n \rightarrow 0^-$
(stessa cosa sostituendo 0 con qualunque altro numero)

Esempio: $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

③ Se a_n non è limitata superiormente, allora $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio: $a_n = (-2)^n$: $1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

oppure $b_n = 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \dots$
— 0 — 0 —

Oss. Nella definizione di ① posso scrivere equivalentemente

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $|a_n - l| \leq \varepsilon$ definitivamente

distanza tra a_n ed l .

— 0 — 0 —

Esercizio Se $a_n \rightarrow 0^+$, è vero che a_n è definitivamente decrescente?