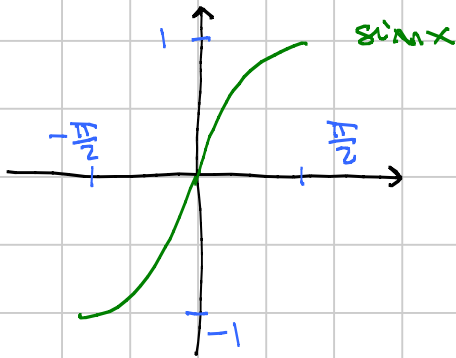


ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 010

Titolo nota

01/10/2011

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE



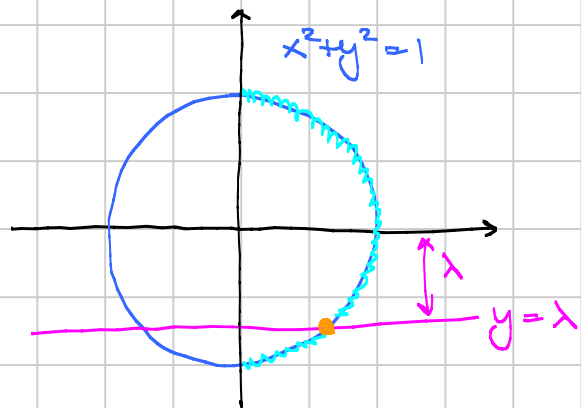
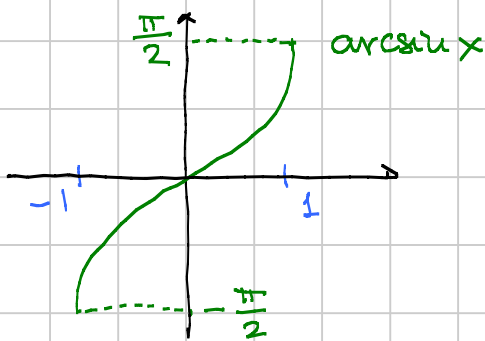
La funzione $\sin x$ vista come

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

è iniettiva, surgettiva, strettamente crescente. Ammette quindi una funzione inversa $g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ che è

$$g(x) = \arcsin x$$

Quindi $\arcsin x$ prende in INPUT valori $x \in [-1, 1]$ e fornisce in output valori in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. È una funzione strett. crescente.



Nella circonferenza trigonometrica: dato $\lambda \in [-1, 1]$ traccio la retta $y = \lambda$. In generale ho 2 intersezioni. L'intersezione corrispondente ad un angolo in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è proprio $\arcsin \lambda$.

— o — o —

La funzione $\cos x$, vista come $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è iniettiva, surgettiva, strettamente decrescente.

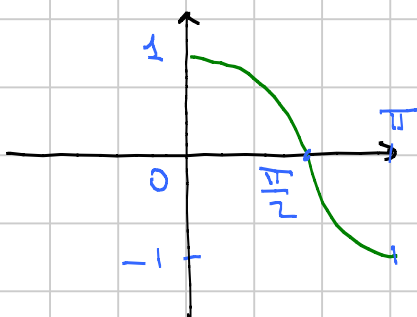
Quindi ha un' inversa

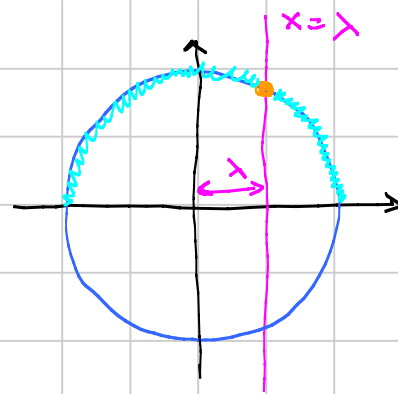
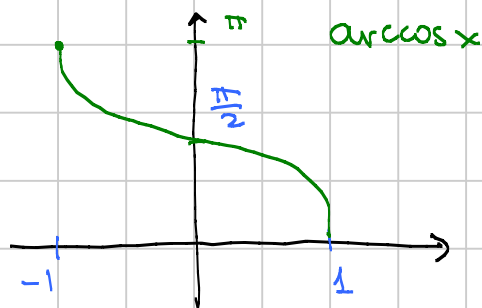
$$g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

che è

$$g(x) = \arccos x$$

Input: $[-1, 1]$ Output: $[0, \pi]$



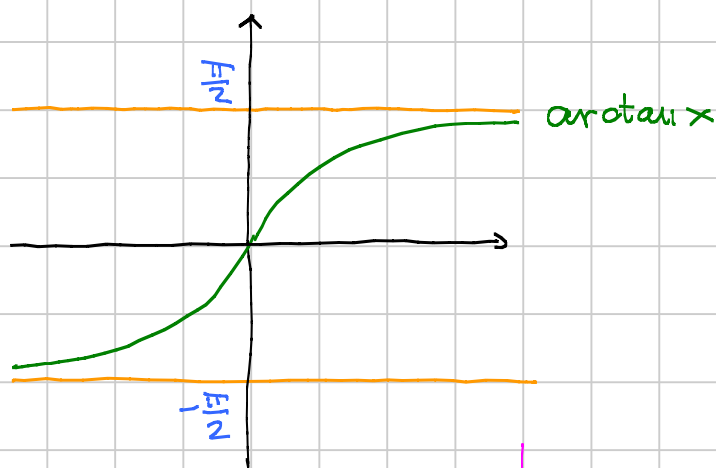
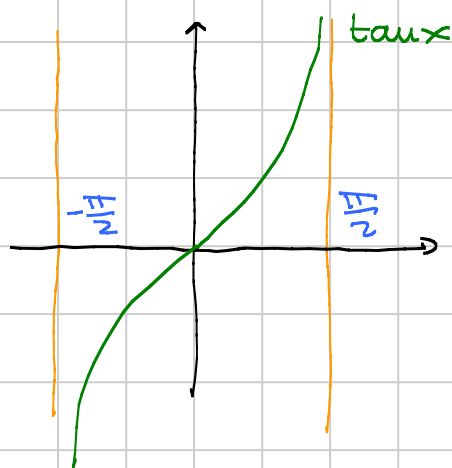


Nella circ. trigonometrica: dato $\lambda \in [-1, 1]$ traccio la retta $x = \lambda$ e prendo l'intersezione nella parte alta, cioè quella in $[0, \pi]$.
L'angolo (o meglio arco) corrispondente è proprio $\arccos \lambda$.

$f(x) = \tan x$ Pango $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
l'insieme di definizione in cui $\cos \neq 0$.

Allora, vista come $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva ma è surg.
Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva, surgettiva, e strettamente crescente. Quindi ammette un'inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ che si indica con $g(x) = \arctan x$

Input: valori reali qualunque Output: valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

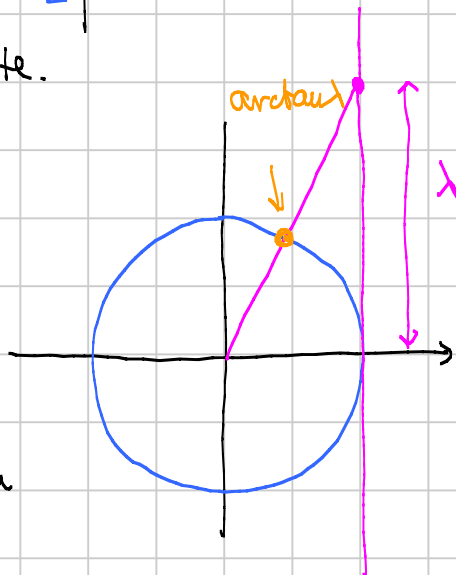


$\arctan x$ è DISPARI e strett. crescente.

Nella circonferenza trigonometrica:

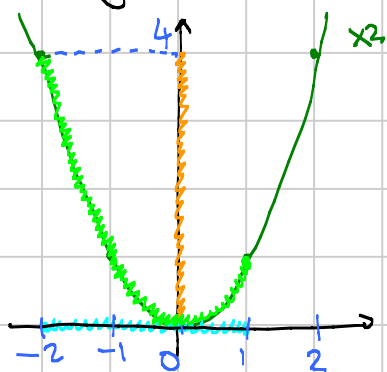
fisso $\lambda \in \mathbb{R}$ (qualunque), prendo sulla tangente il p.to ad altezza λ .

Unisco con l'origine e individuo un unico p.to in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la cui $\tan$ è proprio λ . Questo è $\arctan \lambda$.



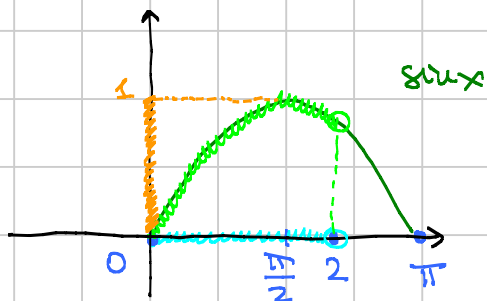
Esercizi su immagine e controimmagine.

$f(x) = x^2$. Calcolare $f([-2, 1]) = \{f(x) : x \in [-2, 1]\}$
È uguale a $[0, 4]$. Come si vede graficamente?

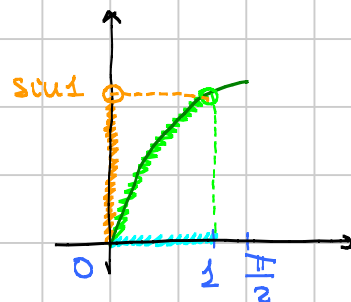


- Individuo $[-2, 1]$ in partenza
- Trovo il corrispondente tratto di grafico
- Riporto il tratto di grafico sull'asse y, cioè nell'insieme di arrivo, e quello che ottengo è l'immagine

$f(x) = \sin x$ Calcolare $f([0, 2]) = \{f(x) : x \in [0, 2]\}$
 $= [0, 1]$

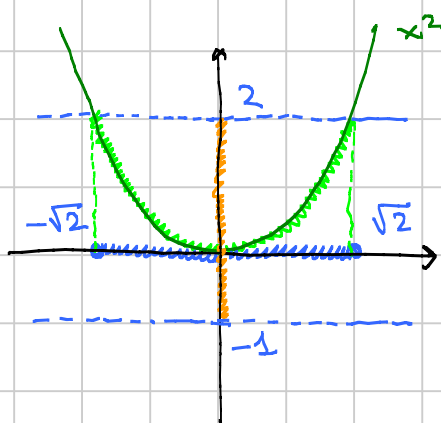


$$f([0, 1]) = [0, \sin 1]$$



Controimmagine $f(x) = x^2$ Calcolare

$$f^{-1}((-1, 2)) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (-1, 2)\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$



- individuare $(-1, 2)$ nell'insieme di arrivo, cioè sull'asse y
- individuare il corrispondente tratto di grafico
- riportare il tratto sull'insieme di partenza. Così ottengo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Riassumendo: IMMAGINE: asse x $\rightarrow$ grafico $\rightarrow$ asse y
CONTROIMMAGINE: asse y $\rightarrow$ grafico $\rightarrow$ asse x
— o — o —

Esercizio

$$\arccos(\cos 3) = 3$$

✓

$$\arccos(\cos 2) = 2$$

✓

$$\arccos(\cos 1) = 1$$

✓

$$\arcsin(\sin 3) = 3$$

F

$$\arcsin(\sin 2) = 2$$

F

$$\arcsin(\sin 1) = 1$$

✓

$$\cos(\arccos \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

✓

$$\cos(\arccos 2) = 2$$

F

$$\sin(\arcsin \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

✓

$$\sin(\arcsin 3) = 3$$

F

} arcsin non può fornire
valori fuori di
 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

↗ in INPUT di arcsin e
↘ arccos solo valori
in $[-1, 1]$!!!

Si può cancellare una funzione con la sua inversa?

Sì, ma solo se l'argomento sta nell'insieme di definizione della funzione più interna.

Esercizio (Hard) Calcolare $\arccos(\cos 4)$.
 $\arcsin(\sin 2)$.