

# ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 009

Titolo nota

01/10/2011

## FUNZIONI ELEMENTARI: POTENZE E RADICI

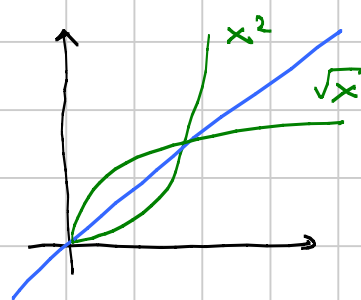
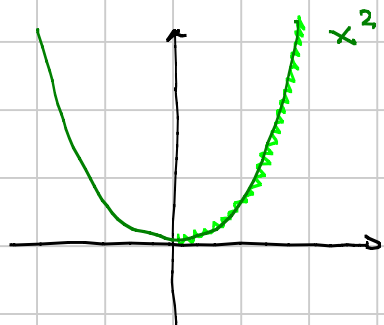
Potenze di esponente pari  $f(x) = x^2$  (stesso discorso per  $x^4, x^6, x^8, \dots$ )

Funzioni PARI:  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ .

Vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non è iniettiva, surgettiva, monotona.

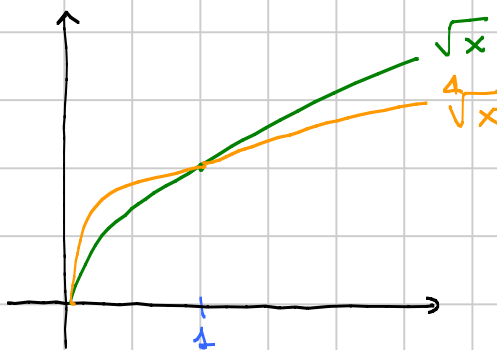
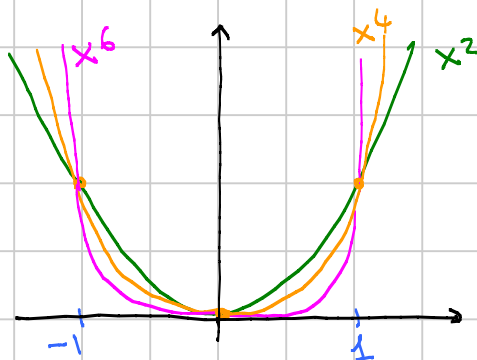
Vista come  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  è iniettiva, surgettiva, strettamente crescente. Quindi ammette una funzione inversa  $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  che è  $g(x) = \sqrt{x}$ .

Oss.  $g(x) = \sqrt{x}$  prende in input valori  $\geq 0$  e restituisce valori  $\geq 0$ .



Fatto generale: il grafico di una funzione e della sua inversa sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Perché? Se  $(x, y) \in$  grafico di  $f$ , allora  $(y, x) \in$  grafico inversa.



Oss.  $(3x+4)^2 = (5x-1)^2$   $3x+4 = 5x-1$

NO! perché la funzione  $f(x) = x^2$  non è iniettiva su  $\mathbb{R}$ .

Potrei se sapessi per qualche motivo che gli argomenti sono  $\geq 0$

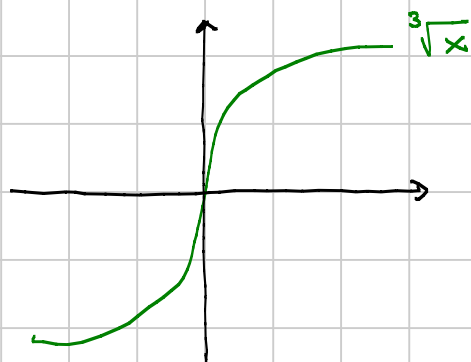
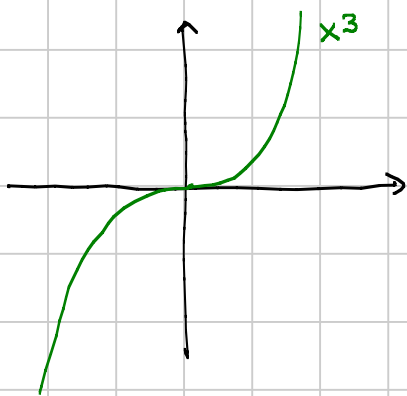
$(3x^4+2)^2 = (2^x+3)^2$   $3x^4+2 = 2^x+3$  O.k.

Potenze con esponenti dispari  $f(x) = x^3$  (stesso discorso per  $x^5, x^7, \dots$ )

Vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **DISPARI**:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Inoltre è strettamente crescente, iniettiva e surgettiva. Quindi esiste la funzione inversa  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ed è  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .



Oss. La funzione  $\sqrt[3]{x}$  prende in INPUT valori reali qualunque e restituisce in OUTPUT valori con lo stesso segno dell'argomento.

Inoltre è strett. crescente e dispari.

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

$$\sqrt[5]{0} = 0$$

Esempio

$$(2x+1)^{2011} = (4x-3)^{2011}$$

$$2x+1 = 4x-3$$

$$2x = 4 \quad x = 2$$

} corretto perché  $f(x) = x^{2011}$   
è iniettiva, quindi  
simplificabile nelle equaz.

$$(2x+1)^{2011} > (3x+5)^{2011}$$

$$2x+1 > 3x+5$$

$$-x > 4$$

$$x < -4$$

} corretto perché  $f(x) = x^{2011}$   
è strett. cresc., quindi si  
può semplificare  
conservando i versi

$$\sqrt[7]{2x+3} = \sqrt[7]{x-1}$$

$$2x+3 = x-1$$

$$x = -4$$

Ok perché  $\sqrt[7]{x}$  è iniettiva

$$\sqrt[70]{2x+3} = \sqrt[70]{x-1}$$

$$2x+3 = x-1$$

$$x = -4$$

N.B. Potrei semplificare, ma devo controllare (prima o dopo) l'insieme di definizione (facendo la verifica  $x = -4$  non va bene).

## Esponenziali e Logaritmi

("La  $x$  è all'esponente, mentre nelle potenze è alla base")

Consideriamo  $f(x) = a^x$  con  $a > 1$ .

Non ha particolari simmetrie.

Vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è iniettiva, ma non surgettiva. Vista come

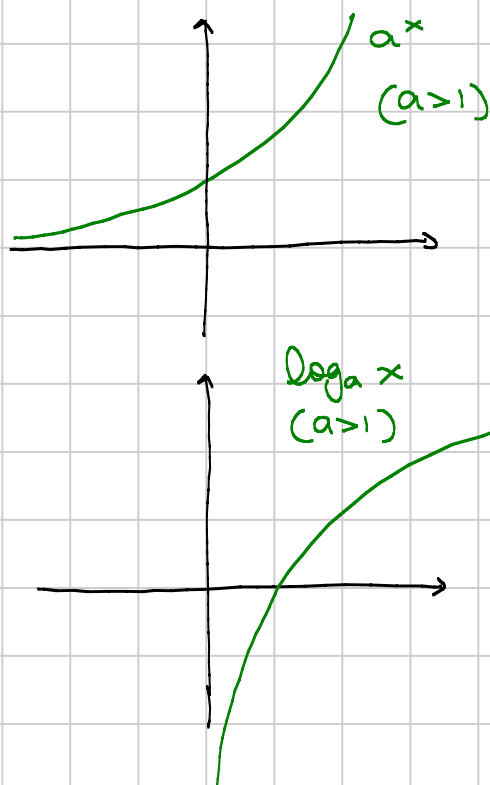
$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  è iniettiva, surgettiva, strettamente crescente. Dunque ammette

una funzione inversa  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  che è  $g(x) = \log_a x$ .

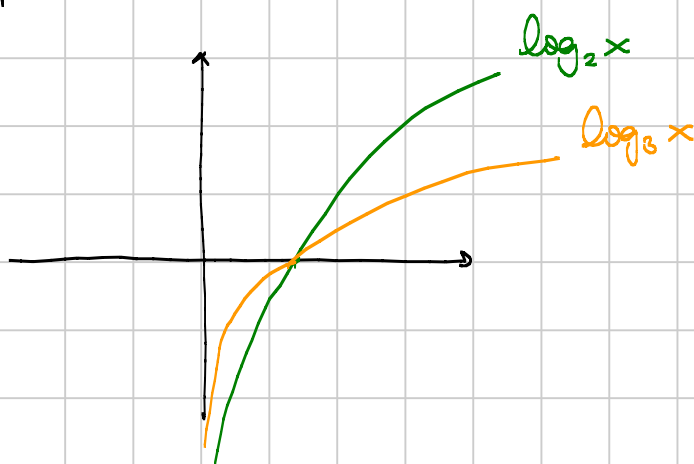
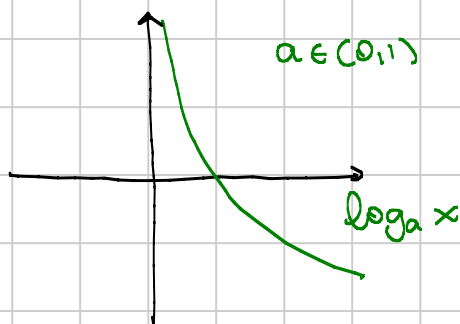
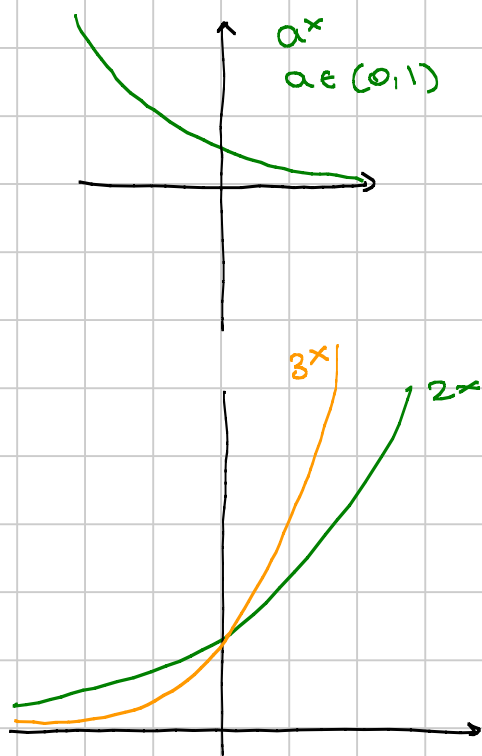
Oss.:  $\log_a x$  prende in input valori  $x > 0$ .

È una funzione strettamente crescente.

— o — o —



Se la base è  $a \in (0, 1)$  cambia la monotonia



Oss. Se  $a = 1$ , la funzione  $a^x$  è costante

Non si considerano funzioni esponenziali con basi  $a < 0$ .

Con basi  $a < 0$  hanno senso "solo" esponenti interi, non esponenti reali qualunque ( $(-3)^{\sqrt{2}}$  non ha senso).

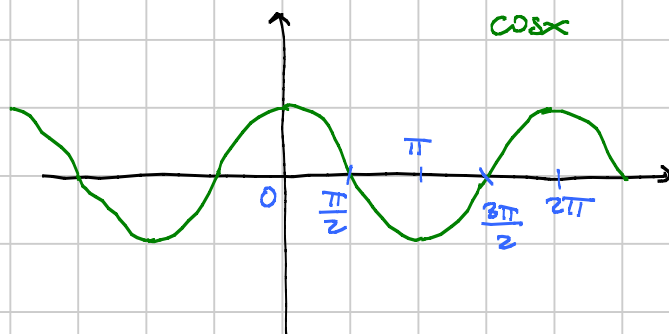
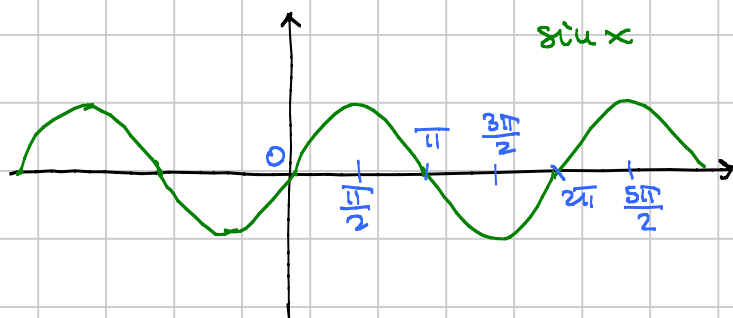
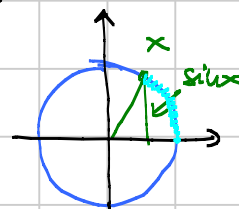
Funzione  $\sin x$   $f(x) = \sin x$

Funzione DISPARI:  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

Funzione PERIODICA di periodo minimo  $2\pi$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non è né iniettiva, né surgettiva, né monotona

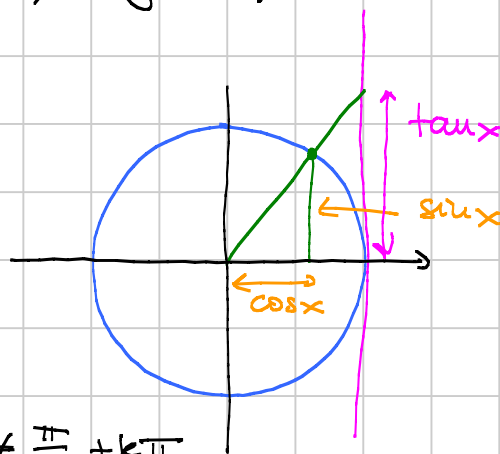


Funzione  $\cos x$  Funzione PARI e periodica di periodo  $2\pi$ .

Vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non è iniettiva, surgettiva, monotona

Funzione  $\tan x$  Funzione DISPARI  
e periodica di periodo minimo  $\pi$ .

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Definita per gli  $x$  t.c.  $\cos x \neq 0$ , cioè  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

