

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 008

Titolo nota

01/10/2011

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ma vale anche se l'insieme di partenza è un opportuno $A \subseteq \mathbb{R}$). La funzione si dice

- **PARI** se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- **DISPARI** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- **PERIODICA** se esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

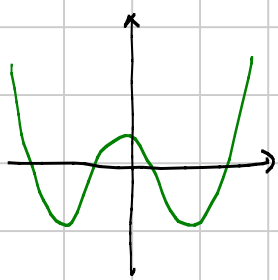
In questo caso ogni $T > 0$ che rende vera la definizione si dice periodo di $f(x)$. Se T è un periodo, allora anche $2T, 3T, 4T, \dots$

solo periodi ($f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x) \dots$).

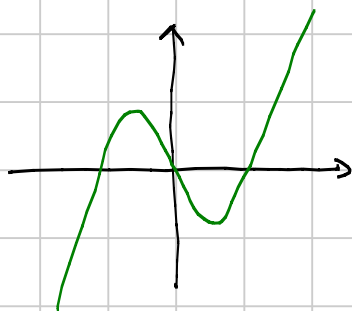
Se c'è un periodo più piccolo di tutti, quello si dice periodo minimo.

In termini di grafico, f è

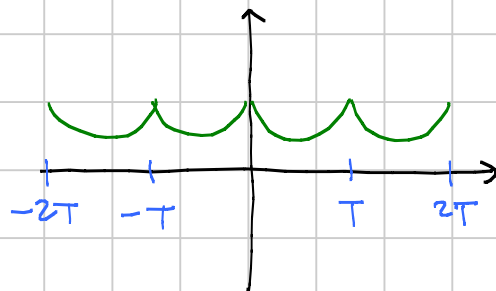
- **PARI** se il grafico è simmetrico rispetto all'asse y ;
- **DISPARI** " " " all'origine;
- **PERIODICA** se il tratto di grafico che corrisponde a $x \in [0, T]$ si ripete "periodicamente".



PARI



DISPARI



PERIODICA

— 0 — 0 —

Proprietà di MONOTONIA Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

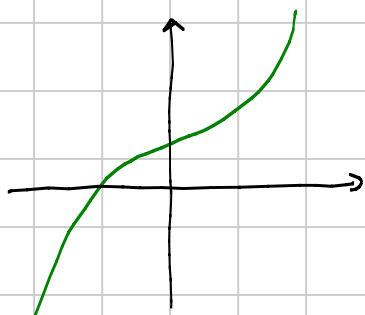
- debolmente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$
- strettamente crescente se $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$
- debolmente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$
- strettamente decrescente se $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

Una funzione si dice MONOTONA se rientra in uno dei 4 casi precedenti.
Si dice strettamente monotona se...

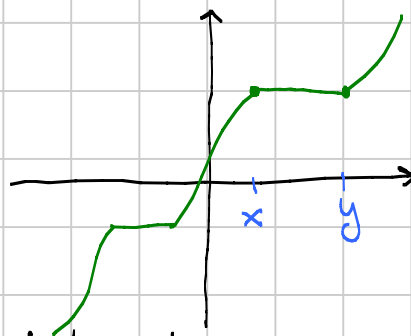
Oss. Meglio non usare mai crescente/decrescente senza l'avverbio strettamente/decrescente.

Achtung! Una funzione strettamente crescente è anche in particolare debolmente crescente. Idem per il decrescente.

Una funzione che è debolmente, ma non strettamente crescente, ha tratti piatti nel grafico



strettamente crescente, dunque anche debolm. cresc.



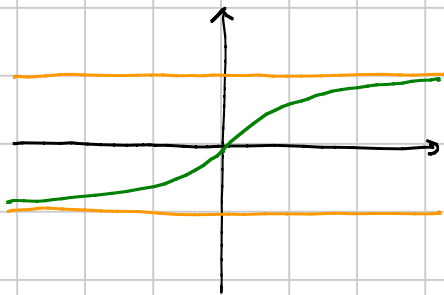
debolmente, ma non strettamente crescente (oss.: se $x < y$ e $f(x) = f(y)$, allora f è costante in tutto l'intervallo $[x, y]$)

Simmetrie, monotonia, iniettività.

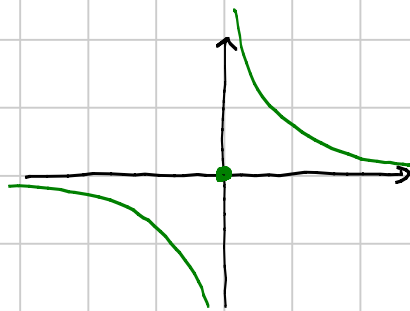
① Una funzione pari NON può essere iniettiva. Infatti $f(-x) = f(x)$: se $x \neq 0$ ho 2 valori diversi in partenza a cui corrisponde lo stesso valore in arrivo.

② Le funzioni strettamente monotone sono sempre iniettive. Siano infatti a_1 e a_2 due valori diversi in partenza. Posso supporre $a_1 < a_2$. Se f è strett. cresc., allora $f(a_1) < f(a_2)$. Se f è strett. decr., allora $f(a_1) > f(a_2)$. In entrambi i casi $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Achtung! Strettamente monotona $\nRightarrow$ surgettiva
 Iniettiva $\nRightarrow$ monotona



strett. crescente, ma non
 surgettiva



bigettiva (ogni retta $y = \lambda$ incontra
 una e una sola volta il grafico),
 ma non monotona ($f(1) > f(0)$ e
 $f(2) < f(1)$)

— o — o —

Iniettività, monotonia, equazioni, disequazioni

Esempio

$$2^{3x+1} = 2^{x+3}$$

$$3x+1 = x+3$$

$$2x = 2 \quad x = 1$$

$$2^{2x+3} > 2^{3x+1}$$

$$2x+3 > 3x+1$$

$$x < 2$$

Si possono fare questi passaggi? NO, o per lo meno SI.

- Nelle equazioni $\cancel{f}(A) = \cancel{f}(B) \Leftrightarrow A = B$
 è OK se f è iniettiva, ovviamente controllando che A e B
 appartengano all'insieme di definizione della funzione $f(x)$
- Nelle disequazioni $\cancel{f}(A) > \cancel{f}(B) \Leftrightarrow A > B$
 è OK se f è strettamente crescente (con A e B nell'insieme di
 definizione di $f(x)$)

Dim. Supponiamo che sia $f(A) > f(B)$. Ci sono 3 possibilità

- $A = B$, allora sarebbe $f(A) = f(B)$, che è contro l'ipotesi
- $A < B$, allora per la stretta crescenza sarebbe $f(A) < f(B)$,
 che è contro l'ipotesi.

Dunque resta solo la possibilità $A > B$.

Guardando bene la dimostrazione si ha che

$$f(A) > f(B) \Leftrightarrow A > B$$

è OK anche se f è debolmente crescente.

Esercizio Quando è OK il passaggio $f(A) \geq f(B) \Leftrightarrow A \geq B$

- Nelle disequazioni il passaggio $f(A) > f(B) \Leftrightarrow A < B$ è OK se f è debolmente decrescente (esercizio: fare dim. come sopra).

Riassunto: $\rightarrow$ le funzioni iniettive si possono impunemente semplificare nelle equazioni

$\rightarrow$ le funzioni ... crescenti si possono impunemente semplificare nelle disequazioni

$\rightarrow$ le funzioni ... decrescenti si possono semplificare nelle disequazioni A PATTO DI INVERTIRE I VERSI.

Esempio $\log_7(2x+3) = \log_7(x+1)$

La funzione $\log_7 x$ è iniettiva, quindi semplifico e ottengo

$$2x+3 = x+1$$

$$x = -2.$$

NO! Bisogna controllare che i 2 argomenti stiano nella zona di definizione di $\log_7 x$, cioè imporre $2x+3 > 0$

$$x+1 > 0,$$

oppure fare la verifica alla fine.