

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 007

Titolo nota

30/09/2011

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Si dice grafico di f il sottoinsieme del prodotto $A \times B$ definito da

$$\begin{aligned}\text{grafico}(f) &= \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \quad \text{Per proprietà} \\ &= \{(a, f(a)) : a \in A\} \quad \text{stessa cosa per elenco.}\end{aligned}$$

Nel caso di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se

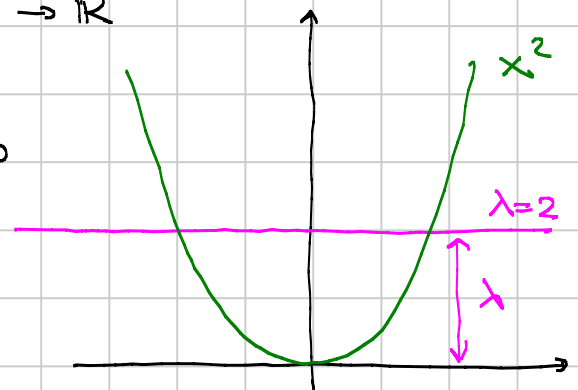
- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha al massimo una soluzione (se l'equazione avesse almeno 2 soluzioni distinte, esisterebbero 2 valori distinti della x con la stessa immagine)
- equivalentemente, se il grafico di $f(x)$ incontra ogni retta parallela all'asse x in al più un punto.

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva se e solo se

- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione
- equivalentemente, se il grafico di $f(x)$ incontra ogni parallela all'asse x in almeno un punto.

Esempio 1 $f(x) = x^2$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- non è iniettiva perché esistono parallele all'asse x che incontrano il grafico in 2 pti
- non è surgettiva perché esistono parallele che non incontrano (quelle con $\lambda < 0$)



Esempio 2 $f(x) = x^2$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$.

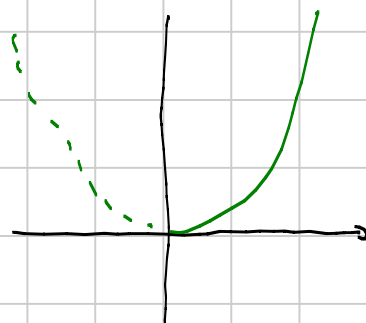
Per via dell'insieme di arrivo sono vietati i $\lambda < 0$. Considero solo le parallele all'asse x con $\lambda \geq 0$.

Ora è surgettiva, ma non iniettiva.

Esempio 3 $f(x) = x^2$, vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Ora considero tutte le rette $y = \lambda$, ma guardo solo le intersezioni con $x \geq 0$.

Ora è iniettiva, ma non surgettiva.



Esempio 4 $f(x) = x^2$, vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

Ora è iniettiva e surgettiva, dunque invertibile.

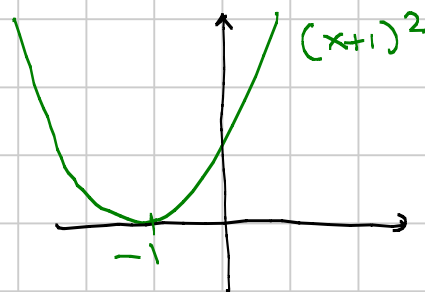
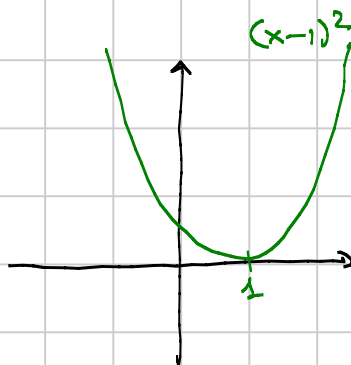
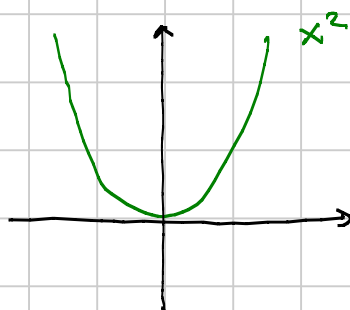
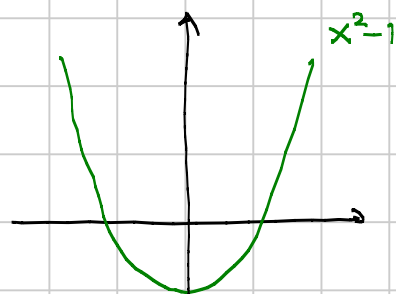
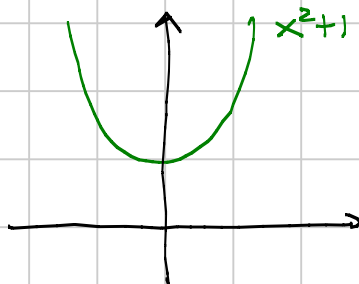
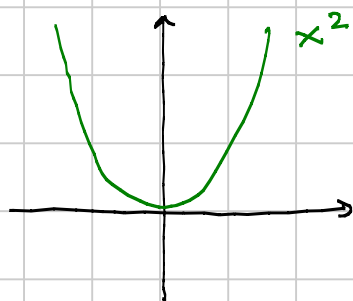
La funzione inversa è una $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ed è $g(x) = \sqrt{x}$.

Oss. La radice prende in input valori ≥ 0 e restituisce valori ≥ 0 .

Operazioni sui grafici

① $f(x) \rightsquigarrow f(x) + c$ traslare in alto o in basso di c

② $f(x) \rightsquigarrow f(x + c)$ traslare dx - sx di c

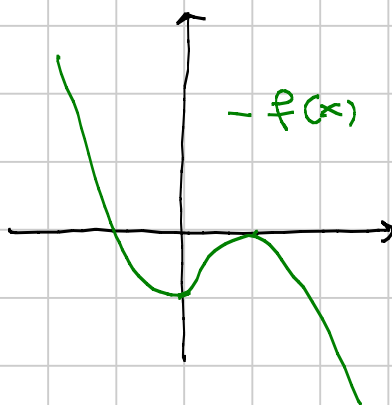
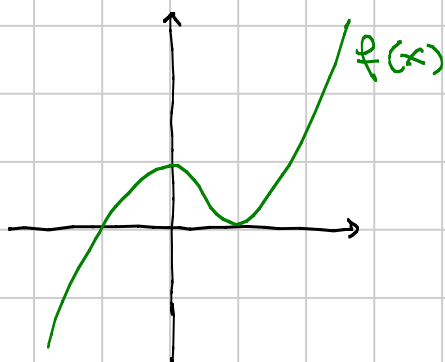


③ $f(x) \rightsquigarrow -f(x)$

simmetria rispetto all'asse x

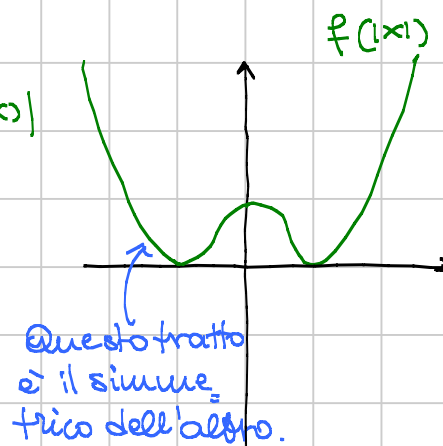
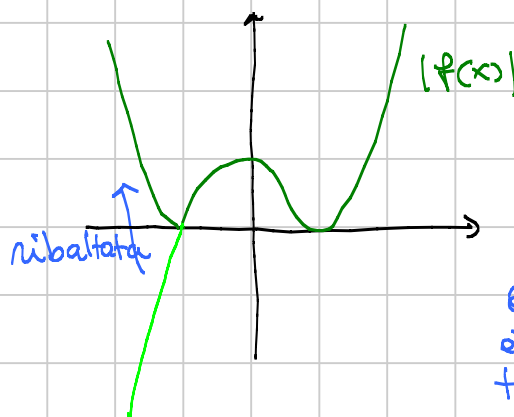
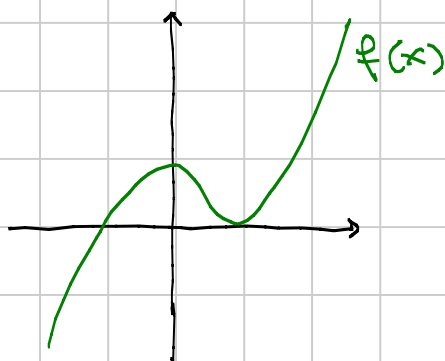
④ $f(x) \rightsquigarrow f(-x)$

" " " y



⑤ $f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$ le parti sotto l'asse x si ribaltano sopra

⑥ $f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$



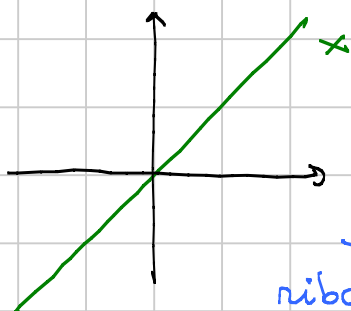
Consideriamo $f(|x|)$. Per $x \geq 0$ è come $f(x)$

Per $x \leq 0$ è come $f(-x)$, quindi la

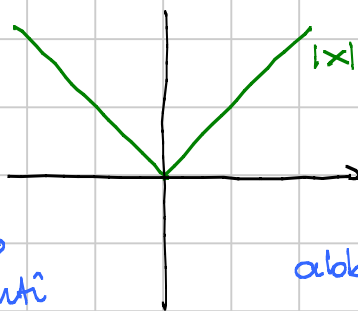
ribaltata di $-x$ della precedente

— 0 — 0 —

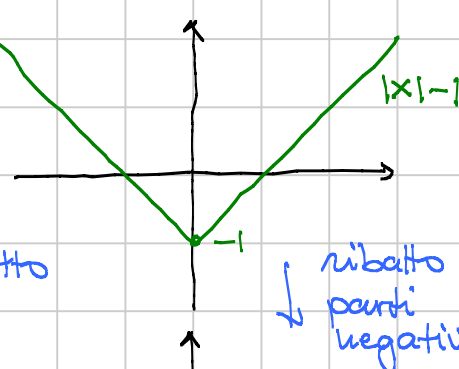
Esempio 1 Quante sono le soluzioni dell'equazione $||x|-1| = \frac{1}{2}$



ribalto parti negative



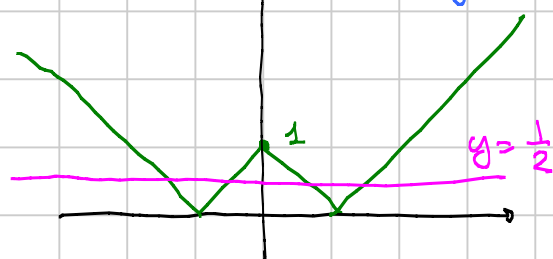
abbasso tutto di 1



ribalto parti negative

Si vede quindi che l'equazione

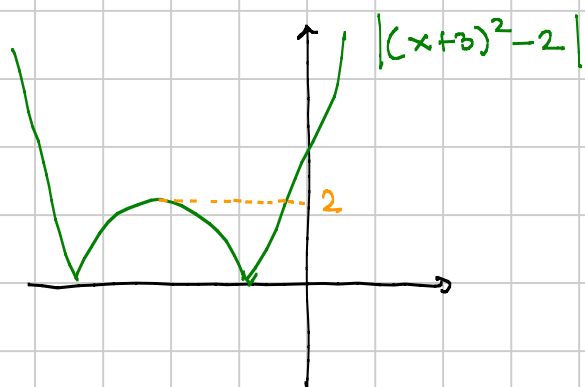
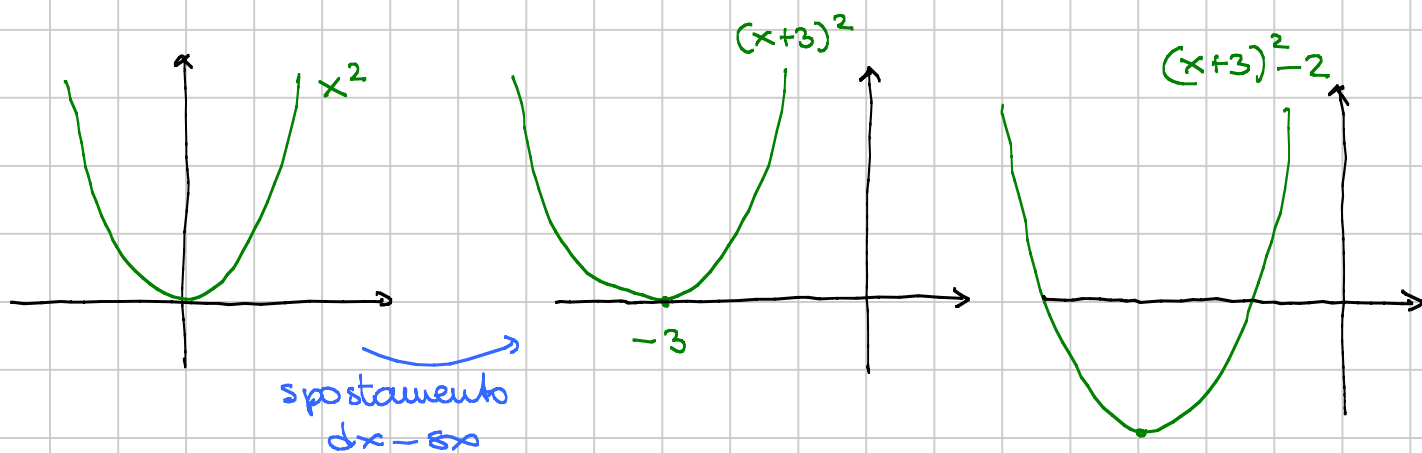
ha 4 soluzioni: $x = \pm \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{3}{2}$



Esempio 2

Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni reali di

$$|(x+3)^2 - 2| = \lambda$$



Quindi $|(x+3)^2 - 2| = \lambda$ ha

- 0 soluzioni se $\lambda < 0$
- 2 soluzioni se $\lambda = 0$
- 4 soluzioni se $\lambda \in (0, 2)$
- 3 soluzioni se $\lambda = 2$
- 2 soluzioni se $\lambda > 2$

La funzione, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è surgettiva, ma non iniettiva.