

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 006

Titolo nota

30/09/2011

ESTREMO INFERIORE E SUPERIORE Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

L'estremo superiore di A si indica con $\sup A$ ed è

- $+\infty$ se A non è limitato superiormente, cioè se non esistono maggioranti
- il minimo dei maggioranti se A è lim. superiormente.

Analogamente

- $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente
- $\inf A =$ massimo dei minoranti altrimenti.

Esempi

① $\mathbb{N}$: $\sup = +\infty$, max. N.E., $\min = 0$, $\inf = 0$

(i minoranti sono tutti i reali $x \leq 0$)

② $\mathbb{Z}$: $\sup = +\infty$, max N.E., $\min = \text{N.E.}$, $\inf = -\infty$

③ $[2, 5]$ $\sup = 5$, $\max = 5$, $\min = \text{N.E.}$, $\inf = 2$

(i maggioranti sono tutti i reali $x \geq 5$, i minoranti sono tutti i reali $x \leq 2$)

Oss. ① Se esiste $M = \max A$, allora M è anche $\sup A$ (idem per $\inf$)

② Se $L = \sup A$ e $L \in A$, allora $L = \max A$ (idem per $\inf$)

③ Estremo inferiore e superiore sono obbligati ad esistere (reali o $\pm\infty$) e sono unici.

— 0 — 0 —

Teorema Se $A \neq \emptyset$, allora $\sup A$ esiste per forza.

Dim. Se A non è limitato superiormente, allora $\sup A = +\infty$ per definizione.

Supponiamo che A sia limitato superiormente, e indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A .



So che $B \neq \emptyset$ e devo dimostrare che esiste il $\min B$.

Ora B sta tutto a dx di A perché gli elementi di B sono maggioranti. Allora per l'assioma di continuità $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (c è un maggiorante, cioè $c \in B$)

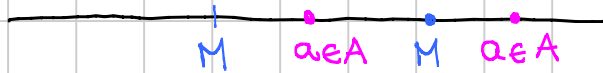
(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo di tutti gli el. di B)

Dalla (i) e (ii) si deduce che $c = \min B$.

Esercizio Ripetere la dim. adattandola al caso dell'inf.

Caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$.

① $\sup A = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$



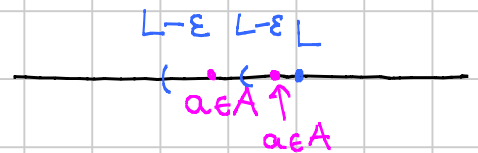
Comunque io scelga l'insieme A , visto il valore di M , tira fuori un elemento $a \geq M$.

② $\inf A = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ t.c. $a \leq M$

③ $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (questo dice che L è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \geq L - \varepsilon \quad a \in A$

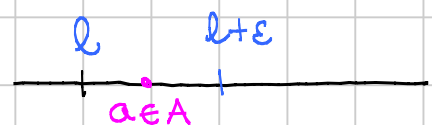


Comunque io mi sposti un po' a sx di L , anche di pochissimo, c'è un elemento $a \in A$ più grande del punto in cui mi sono spostato.

④ $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se

(i) $l \leq a \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.c. $a \leq l + \varepsilon$



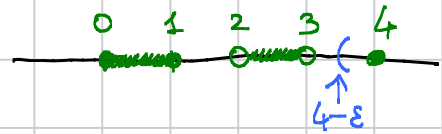
Esempi $A = \{3\}$. Allora

$$\inf A = \min A = \max A = \sup A = 3$$

I maggioranti sono tutti i reali $x \geq 3$

I minoranti " " " $x \leq 3$

$$A = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$$



$$\inf = \min = 0 \quad \sup = \max = 4$$

I maggioranti sono tutti i reali ≥ 4

I minoranti " " " ≤ 0 .

Caratterizzazione del sup in questo esempio $L = 4$

(i) $a \leq 4 \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ t.c. } a \geq 4 - \varepsilon$ Questo a è sempre 4.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\} \quad \text{Descrizione per proprietà}$$

Risolvero la disequazione e trovo che $A = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, quindi

$$\inf A = -\sqrt{3}, \quad \sup = \sqrt{3}, \quad \max \text{ e } \min \text{ N.E.}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 < 3\}$$

In questo caso $\inf B = \min B = 0$, $\max B = \sup B = 1$

perché $B = \{0, 1\}$ (insieme costituito da 2 elementi)

$$C = \{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{Descrizione per elenco}$$

$$C = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\} \quad \inf = \min = 0, \quad \sup = +\infty, \quad \max \text{ N.E.}$$

$$D = \{n^2 : n \in \mathbb{Z}, n > 3\} \quad \inf = \min = 16, \quad \sup = +\infty, \quad \max \text{ N.E.}$$

$$D = \{16, 25, 36, \dots\}$$

↑ quadrati di interi $n > 3$, cioè $\square$ di interi $n \geq 4$.