

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 005

Titolo nota

30/09/2011

NUMERI REALI

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

- Proprietà algebriche
- Proprietà di ordinamento
- Assioma di continuità

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

su $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di somma e prodotto, con queste proprietà:

- (S1) $a+b = b+a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$ (commutativa)
- (S2) $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$ (associativa)
- (S3) $\exists 0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (elemento neutro)
- (S4) $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+b = 0$ (esistenza opposto o inverso rispetto alla somma)
 $(b = -a)$
 NO in $\mathbb{N}$
- (P1) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall \dots$
- (P2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall \dots$
- (P3) $\exists 1 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- (P4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } ab = 1$ (esistenza dell'inverso rispetto al prodotto)
 $(b = \frac{1}{a})$
 NO in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$
- (D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (distributiva)

Esempio

$$3x + 2 = 7 \quad \text{Aggiungo a dx e sx l'inverso di 2 rispetto alla somma}$$

$$3x + \underbrace{2 + (-2)}_{=0} = 7 + (-2)$$

$$3x = 5 \quad \text{Moltiplico a dx e sx per l'inverso moltiplicativo di 3}$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)}_1 \cdot x = 5 \cdot \frac{1}{3} \quad x = \frac{5}{3}$$

PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO

Se x e y sono numeri reali, allora vale

$x \leq y$ oppure $y \leq x$, con queste proprietà

(O1) $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(riflessiva)

(O2) se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$

(antisimmetrica)

(O3) se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$

(transitiva)

Collegamento con operazioni algebriche

(OS) Se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

(OP) Se $x \leq y$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z \quad \forall z \geq 0$

(OP') Se $x \leq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \leq 0$

↑ si scambia il verso

Esempio

$$7 - 2x \leq 10$$

Per (OS) aggiungo -7 a dx e sx

$$-7 + 7 - 2x \leq 10 - 7$$

Uso proprietà della somma

$$-2x \leq 3$$

Moltiplico per $-\frac{1}{2}$ e grazie a (OP')

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

scambio i versi

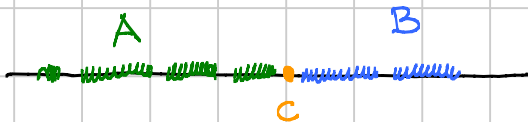
Achtung! Da non fare mai: moltiplicare per roba di cui non si conosce il segno

$$\frac{x+1}{2x-3} \geq 2 \quad \text{NO} \quad x+1 \geq 2(2x-3)$$

Non conosco il segno di $2x-3$

— o — o —

ASSIOMA DI CONTINUITÀ



Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che

A sia tutto a sx di B , cioè

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \quad \forall a \in A$$

$$c \leq b \quad \forall b \in B.$$

Oss. • $A \cap B$ è $\emptyset$ oppure ha un solo elemento, che è proprio il c

• c non è obbligato ad essere unico (potrebbe esserci un "buco" fra A e B)

• c può essere unico anche se $A \cap B = \emptyset$ (es: $A = x < 0$ $B = x > 0$)

Osservazione L'assioma di continuità vale in $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$.

Ad esempio prendo

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \geq 2\}$$

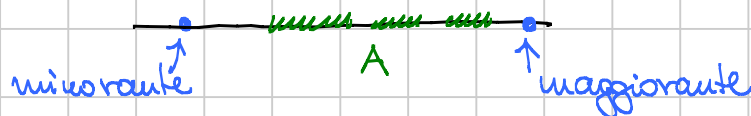
È abbastanza chiaro che A sta a tutto a sx di B .

Un eventuale separatore c dovrebbe avere $c^2 = 2$. Tuttavia in $\mathbb{Q}$ non esiste nessun c t.c. $c^2 = 2$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), mentre esiste in $\mathbb{R}$.

Definizioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

Si dice che un numero reale $k \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se
 $k \geq a \quad \forall a \in A$

Si dice che $k \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se $k \leq a \quad \forall a \in A$.



Oss. ① Maggioranti e minoranti non sono obbligati ad esistere (se $A = \mathbb{N}$, allora non esistono maggioranti e -22 è un minorante, se prendo $A = \mathbb{Z}$, allora non ci sono né maggioranti, né minoranti)

② Quando esistono, non sono mai unici (se k è maggiorante, allora lo sono tutti i numeri $\geq k$)

L'insieme A si dice

- limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante (dunque ne esistono infiniti)
- limitato inferiormente se ... minorante
- limitato se è contemporaneamente limitato inferiormente e superiormente.

Oss. $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|a| \leq k \quad \forall a \in A$$

(cioè $-k \leq a \leq k$)

Def. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A e si scrive $M = \max A$ se

(i) $a \leq M \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante)

(ii) $M \in A$ (cioè M appartiene ad A)

Analogamente, $m = \min A$ se

(i) $a \geq m \quad \forall a \in A$

(ii) $m \in A$.

Oss. ① $\max$ e $\min$ non sono obbligati ad esistere, nemmeno se l'insieme è limitato. Ad esempio $(0,1)$ (intervallo senza estremi) è limitato, ma non ha né $\max$, né $\min$.

② Se $\max$ e/o $\min$ esistono, allora sono per forza unici (dimostrarlo!)