

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 004

Titolo nota

29/09/2011

Esempio 1 Dimostrare che $3^n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passo base $n=0$: $3^0 \geq 0$ $1 \geq 0$ Ok.

Passo induttivo $n \Rightarrow n+1$ Ipotesi : $3^n \geq n$ Tesi : $3^{n+1} \geq n+1$

Dim. passaggio induttivo : catena di uguaglianze e disuguaglianze (tutte dalla stessa parte)

$$\begin{array}{ccccccc} 3^{n+1} & = & 3 \cdot 3^n & \geq & 3n & \geq & n+1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{PCM} & & \text{Uso Hp} & & \text{speso che} & & \text{sia vero} \\ & & \text{moltiplicata} & & \text{sia vero} & & \\ & & \text{per 3} & & & & \end{array}$$

Controllo la speranza: $3n \geq n+1$, $2n \geq 1$, $n \geq \frac{1}{2}$

Essendo n intero è come dire $n \geq 1$.

Quindi : speranza Ok per $n \geq 1$, quindi catena di disug. Ok per $n \geq 1$, quindi pass. induttivo Ok per $n \geq 1$, quindi è così!

$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \end{array}$

Per completare la dimostrazione devo fare a mano il caso $n=1$

$$\boxed{n=1} \quad 3^1 \geq 1 \quad 3 \geq 1 \quad \text{Ok.}$$

— 0 — 0 —

Definizione di fattoriale

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (0! = 1)$$

Definizione ricorsiva:

(i) $0! = 1$

(ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

— 0 — 0 —

Esempio 2 Disuguaglianza di BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1.$$

Passo base $n=0$ A sx viene 1, A dx viene 1, quindi ok

Passo induttivo $n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$
Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. P.I.: catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\stackrel{\text{PCM}}{=} (1+x) \cdot (1+x)^n \\ &\stackrel{\text{uso Hp induttiva}}{\geq} (1+x) \cdot (1+nx) \\ &\stackrel{\text{PCM}}{=} 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x + \boxed{nx^2} \end{aligned}$$

≥ 0 : se lo tolgo la somma scende

$$\geq 1+(n+1)x.$$

Quindi il 1° termine è $\geq$ dell'ultimo, il che è proprio la tesi del passo induttivo.

Quali ipotesi ho usato su x ? Dall'ipotesi induttiva ho dedotto che

$$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x) \cdot (1+nx)$$

cioè ho preso l'Hp induttiva e l'ho moltiplicata per $(1+x)$ conservando i versi della disuguaglianza. Questo si può fare solo se si moltiplica per roba ≥ 0 , cioè solo se $1+x \geq 0$, cioè solo se $x \geq -1$.

Quindi il passo induttivo, e di conseguenza la dimostrazione, funziona solo per $x \geq -1$.

Per gli altri valori di x può essere vero o no, ma non l'ho dimostrato!

Osservazione. Se uso Bernoulli con $x=1$ ottengo $2^n \geq n+1$

Esempio 3 Per quali valori di n si ha che $n! \geq 2^n$?

Esperimenti :	$n=0$	$1 \geq 1$	OK	$n=3$	$3! = 6 \geq 8$	NO
	$n=1$	$1 \geq 2$	NO	$n=4$	$4! = 24 \geq 16$	SI
	$n=2$	$2 \geq 4$	NO	$n=5$	$5! = 120 \geq 32$	SI

Idea: la disuguaglianza è vera per $n=0$ e poi per $n \geq 4$.

Dim. a mano (per sostituzione) fino a $n=4$ e poi per induzione

Passo base : $n=4$ fatto sopra : $24 \geq 16$ OK.

Passo induttivo : Ipotesi : $n! \geq 2^n$ Tesi : $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim. P.I. Catena di uguaglianze e disuguaglianze

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^n \geq 2^{n+1}$$

$\uparrow$ Def. ricorsiva di fattoriale $\uparrow$ Hp induttiva moltiplic. per $n+1$ che è ≥ 0 , quindi conservo i versi $\uparrow$ speranza

Controllo la speranza:

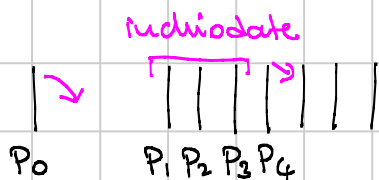
$$(n+1) \cdot 2^n \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}$$
$$(n+1) \cdot \cancel{2^n} \stackrel{?}{\geq} 2 \cdot \cancel{2^n}$$
$$n+1 \stackrel{?}{\geq} 2$$
$$n \geq 1.$$

(occhio : $2^n > 0$, quindi posso semplif.)

Quindi speranza OK per $n \geq 1$, quindi P.I. OK per $n \geq 1$, e a noi in questo caso bastava OK per $n \geq 4$. Quindi la dim. è completa.

— o — o —

Oss. Come sono le tessere del domino nell'esempio 3 ?



Il meccanismo di caduta funziona, rebbe da 1 in poi, ma le tessere 1, 2, 3 non cadono. Tutto parte solo da 4,

Esempio 4 Per quali n è vero che

$$2^n + 3^n \leq 4^n \quad ?$$

Esperimenti:

$n=0$	:	$2 \leq 1$	NO
$n=1$	:	$5 \leq 4$	NO
$n=2$	:	$13 \leq 16$	SI
$n=3$	:	$35 \leq 64$	SI

Idea: P_n è vera
per ogni $n \geq 2$.

Passo base $n=2$: OK

Passo induttivo

$n \Rightarrow n+1$

Ipotesi: $2^n + 3^n \leq 4^n$

Tesi: $2^{n+1} + 3^{n+1} \leq 4^{n+1}$

Dim. P.I. : catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} 4^{n+1} &\stackrel{\text{PCM}}{=} 4 \cdot 4^n \geq 4 \cdot (2^n + 3^n) \stackrel{\text{PCM}}{=} 4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \\ &\quad \uparrow \text{uso Hp. induttiva} \quad \downarrow \downarrow \text{ottengo roba + piccola} \\ &\quad \text{moltiplicata per 4} \quad \geq 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \\ &\quad \quad \quad = 2^{n+1} + 3^{n+1} \end{aligned}$$

— o — o —