

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 003

Titolo nota

29/09/2011

PRINCIPIO DI INDUZIONE $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Insolidiamo con P_n una proprietà dei numeri interi ≥ 0 , cioè una frase con dentro un parametro n , che a seconda del valore di n può essere VERA o FALSA

Esempi

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$2^n \geq n + 5$$

Principio di induzione: metodo per dimostrare che una certa P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

(i) P_0 è vera (cioè P_n è vera quando mettiamo $n=0$)

(ii) se per un certo $n \in \mathbb{N}$ si ha che P_n è vera, allora anche P_{n+1} è vera.

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Di solito (i) si chiama PASSO BASE, (ii) si chiama PASSO INDUTTIVO (il passaggio da un valore di n al successivo).

Bruttamente perché funziona? P_0 è vera per la (i). Uso la (ii) con $n=0$ "se P_0 è vera, allora è vera P_1 ". Poiché P_0 è vera, quindi è vera P_1 .

Uso la (ii) con $n=1$. Essendo P_1 vera, sarà vera anche P_2 . Essendo P_2 vera, è vera anche P_3 , e così via.

Achtung! Quando dim. la (ii) ho come ipotesi che P_n è vera e come tesi che P_{n+1} è vera.

Tessere del domino

$P_0 P_1 P_2 P_3 \dots$

Il passo base equivale a far cadere la tessera P_0

Il passo induttivo equivale al meccanismo di caduta: se cade una tessera, allora cade la successiva.

Variante 1 : supponiamo che

(i) P_{72} è vera

(ii) se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.

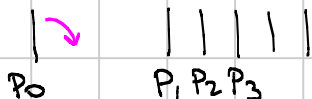
Allora P_n è vera per ogni $n \geq 72$. Non posso dire nulla sulle P_n con $0 \leq n \leq 71$ (dovrei sostituire i valori)

Variante 2 : supponiamo che

(i) P_0 è vera

(ii) se $n \geq 1$ e P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.

Allora non si può dire nulla perché il meccanismo di caduta funziona solo da 1 in poi



In questo caso, se voglio dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ devo dimostrare un secondo passo base, e cioè che P_1 è vera.

Esempio 1 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$

Passo Base $n=1$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Ok

Passo Induttivo $(n \Rightarrow n+1)$ Ipotesi $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (P_n vera)

Tesi: $1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (P_{n+1} vera)

↑
stessa cosa con $(n+1)$
al posto di n

Dim. P.I. Catena di uguaglianze

$$1+2+\dots+(n+1) \stackrel{\text{PCM}}{=} [1+2+\dots+n] + (n+1)$$

uso
ipotesi
induttiva

$$\stackrel{\text{uso}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \stackrel{\text{PCM}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dunque il 1° termine della catena di uguaglianze è uguale all'ultimo, il che è proprio la tesi del passo induttivo.

Esempio 2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1.$

Passo base: $n=1$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Ok

Passo induttivo. Ipotesi: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesi: $1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ← stessa cosa di sopra, con $n+1$ al posto di n

Dim. passo induttivo

uso Hp induttiva

$$[1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + (n+1)^2 \stackrel{\text{uso Hp induttiva}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} (n+1) \cdot \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

— o — o —

Osservazione L'induzione permette di dimostrare rigorosamente una formula trovata in altro modo. Non dà nessuno strumento per scoprire l'uguaglianza da dimostrare.

Esempio 3

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\forall n \geq 0$$

$$\forall a \neq 1$$

Passo base : $n=0$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{a-1}{a-1} = 1$. Ok
(Ho usato già che $a \neq 1$)

Passo induttivo $n \Rightarrow n+1$

Ipotesi : $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

Tesi : $1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$

Dim. passo induttivo : catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} [1 + a + a^2 + \dots + a^n] + a^{n+1} &\stackrel{\text{uso Hp}}{=} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \\ &= \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} \\ &\quad \text{---o---o---} \end{aligned}$$

Oss. 1 Cosa succede nell'esempio 3 se $a = 1$?

$$1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n = n+1 \quad (\text{sono } n+1 \text{ termini tutti uguali ad } 1)$$

Oss. 2 Come può venire in mente la formula dell'esempio 1?

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

Sommando :

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

Dividendo per 2 ho la formula per S.

Nell'esempio 3 basta pensare alle fattorizzazioni:

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1), \quad a^4 - 1 = (a-1)(a^3 + a^2 + a + 1), \dots$$

---o---o---