

A.A. 2011/2012
Corso di Analisi Matematica I
Stampato integrale delle lezioni
Volume 2

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 057: Introduzione alle successioni per ricorrenza: nomenclatura e primo esempio di piano con la monotonia	6
Lezione 058: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza studiati mediante piani con la monotonia.	10
Lezione 059: Interpretazione grafica delle successioni per ricorrenza. Esempi studiati mediante la distanza dal presunto limite.	14
Lezione 060: Esercizi misti sullo studio di funzioni	18
Lezione 061: Esercizi misti sullo studio di funzioni	22
Lezione 062: Successioni per ricorrenza spiraleggianti: studio mediante la distanza dal presunto limite e mediante le sottosuccessioni dei pari e dei dispari	26
Lezione 063: Ulteriori esempi di studio di successioni per ricorrenza autonome . .	30
Lezione 064: Successioni per ricorrenza non autonome: piani con la monotonia, con il rapporto, con limitatezza + carabinieri	34
Lezione 065: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza non autonome	38
Lezione 066: Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza non autonome	42
Lezione 067: Introduzione agli integrali: notazioni, significato geometrico, definizione mediante somme di Riemann superiori e inferiori	46
Lezione 068: Esempi di utilizzo delle somme di Riemann, integrabilità delle funzioni monotone, proprietà degli integrali, esempi di integrali calcolati mediante considerazioni geometriche	50
Lezione 069: Teoria generale per il calcolo operativo di integrali: primitive, funzione integrale, teorema della media integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale	54
Lezione 070: Due esercizi di ricapitolazione su studio di funzioni e successioni per ricorrenza	58
Lezione 071: Discorso sul +c negli integrali indefiniti. Primi esempi di primitive elementari.	61
Lezione 072: Integrazione per parti e primi esempi di applicazione. Grande ritorno.	65
Lezione 073: Trucco dell'1 nascosto e ulteriori esempi di applicazione dell'integrazione per parti	69
Lezione 074: Integrazione per sostituzione e primi esempi di applicazione	73
Lezione 075: Ulteriori esempi di integrazione per sostituzione	77
Lezione 076: Esempi di integrali (anche con valori assoluti) calcolati utilizzando le tecniche viste finora	81
Lezione 077: Integrazione delle funzioni razionali - Parte prima	85
Lezione 078: Integrazione delle funzioni razionali - Parte seconda	89
Lezione 079: Primi esempi di sostituzioni razionalizzanti: esponenziali, seni e coseni, radici di espressioni di primo grado	93

Lezione 080: Sostituzioni razionalizzanti per primitive di radici di polinomi di secondo grado	97
Lezione 081: Sostituzioni razionali per $\sin x$ e $\cos x$ mediante formule parametriche. Esempi di ricapitolazione sul calcolo di integrali.	101
Lezione 082: Integrali impropri: definizioni nei casi monoprobema e spezzamento di un integrale generale in integrali monoprobema.	105
Lezione 083: Studio degli integrali impropri di $1/x^a$ con problemi a 0 e $+\infty$ al variare del parametro a . Discussione sulla “non compensazione” tra integrali impropri divergenti.	109
Lezione 084: Studio di integrali impropri con integrande di segno costante: criterio del confronto e del confronto asintotico	113
Lezione 085: Casi limite di confronto asintotico. Criterio dell’assoluta integrabilità per integrande a segno variabile. Integrali impropri con problemi in punti diversi dall’origine.	117
Lezione 086: Esempi di studio della convergenza di integrali impropri utilizzando i vari criteri	121
Lezione 087: Trucco dell’integrazione per parti per integrali impropri oscillanti (tipo $\sin x/x$, $\cos(x^2)$, $\sin(x^2)$ tra 0 e ∞). Primo esempio di “metodo dei triangolini”	125
Lezione 088: Ulteriore esempio di metodo dei triangolini. Confronto serie-integrali e dimostrazione della convergenza/divergenza delle serie armoniche generalizzate.	129
Lezione 089: Teoremi di scambio serie-derivata per serie di potenze. Utilizzo del teorema di scambio per il calcolo della somma di serie di potenze.	133
Lezione 090: Introduzione alle equazioni differenziali: nomenclatura	137
Lezione 091: Introduzione alle equazioni differenziali: il problema di Cauchy, enunciato dei teoremi di esistenza ed unicità	141
Lezione 092: Metodo risolutivo per equazioni differenziali a variabili separabili. Studio della soluzione: intervallo massimale di esistenza, tempo di vita, esistenza globale, blow-up, break-down	145
Lezione 093: Ulteriori esempi di studio di equazioni differenziali a variabili separabili	149
Lezione 094: Numeri complessi: forma cartesiana, parte reale e immaginaria, piano di Gauss, operazioni algebriche, coniugato, modulo	153
Lezione 095: Coordinate polari nel piano. Forma trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso. Interpretazione di modulo, coniugato, prodotto, reciproco, quoziente in forma trigonometrica.	157
Lezione 096: Potenze e radici n -esime di numeri complessi	161
Lezione 097: Teoria generale delle equazioni differenziali lineari, omogenee e non omogenee	165
Lezione 098: Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: base dello spazio delle soluzioni nel caso omogeneo e ricerca per tentativi di una soluzione nel caso non omogeneo	169
Lezione 099: Equazioni differenziali lineari non omogenee: esempi di ricerca per tentativi di una soluzione	173
Lezione 100: Esercizi su potenze e radici n -esime di numeri complessi	177
Lezione 101: Esercizi su potenze e radici n -esime di numeri complessi. Fattorizzazione di polinomi sui complessi.	181

Lezione 102: Teorema fondamentale dell'algebra. Fattorizzazione di polinomi a coefficienti reali accoppiando le radici complesse coniugate	185
Lezione 103: Funzioni trascendenti di numeri complessi: esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche, funzioni iperboliche	189
Lezione 104: Metodo di variazione delle costanti per equazioni differenziali lineari non omogenee	193
Lezione 105: Equazioni differenziali lineari del prim'ordine: formula risolutiva. . .	197
Lezione 106: Due esempi di studio di equazioni differenziali con parametri (valori soglia, oscillazioni smorzate)	201
Lezione 107: Esempi di studio di equazioni differenziali con parametri (oscillazioni smorzate). Esempio di studio qualitativo di un'equazione differenziale (senza risolverla esplicitamente).	205
Lezione 108: Esercizi misti sui numeri complessi	209
Lezione 109: <i>O</i> grande. Esempi di esercizi mondo reale che conducono a stimare la somma di serie.	213
Lezione 110: Esercizi misti presi da test e scritti d'esame	217
Lezione 111: Esercizi misti basati su funzioni integrali	221

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 057

Titolo nota

05/11/2011

Successioni per ricorrenzaEsempio

$x_0 = 1$

$x_{n+1} = 2x_n + 1$

dato iniziale

regola di passaggio da un termine al successivo

Questo permette di calcolare iterativamente i successivi valori della succ.:

$$x_1 = 2x_0 + 1 = 3, \quad x_2 = 2x_1 + 1 = 7, \quad x_3 = 2x_2 + 1 = 15, \quad x_4 = 2x_3 + 1 = 31, \dots$$

Per sapere il valore di un termine della successione, occorre calcolare prima tutti i precedenti.

Più in generale:

 $x_0 = \text{qualcosa di dato}$

$x_{n+1} = f(x_n)$

Successione per ricorrenza

→ del 1° ordine (dipendenza dal termine precedente)

→ autonoma (x_{n+1} dipende da x_n , ma non da n)Esempio non autonomo

$x_0 = 1$

$x_{n+1} = 2x_n + n$

dipendenza dal termine precedente (1° ordine)
e da n (non autonomo)

$x_0 = \text{qualcosa di dato}, \quad x_{n+1} = f(x_n, n)$

1° ordine, non autonomo

Nell'esempio: $x_1 = 2$

$x_1 = 2x_0 + 0 = 2$

$x_2 = 5 = 2x_1 + 1$

regola di passaggio con $n=0$ regola con $n=1$

$x_3 = 2x_2 + 2 = 12$

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$

2° ordine (dipendenza dai 2 termini precedenti, autonomo)

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, n)$

2° ordine non autonomo.

Se la ricorrenza è di ordine k , occorrono k condizioni iniziali per avviare la procedura.Oss. In alcuni casi fortunati si può trovare una FORMULA ESPlicita.

Obiettivo teorico generale: determinare il comportamento della successione senza disporre di una formula generale.

Esempio 1 $x_{n+1} = x_n^2$, $x_0 = \frac{3}{4}$ Sarebbe possibile determinare la formula esplicita (esercizio!)

$$x_1 = \frac{9}{16}, \quad x_2 = \frac{81}{256}$$

Semberebbe che x_n sia decrescente e $x_n \rightarrow 0$. Come dimostrarlo?

PIANO

- (i) $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$,
- (iv) $l = 0$.

Se dimostro i vari p.ti del piano, ho quello che volevo. Ogni p.to va dimostrando usando, se serve, i p.ti precedenti.

Dim. (iii) Dal p.to (ii) so che a_n è debolmente decrescente
 Dal p.to (i) so che a_n è limitata inferiormente (uso solo a_0)
 Pertanto il teo. delle successioni monotone garantisce l'esistenza di un limite reale.

Dim. (iv) Scrivo la ricorrenza $x_{n+1} = x_n^2$

$$\begin{array}{ccc} \text{p.to (iii)} & \rightarrow & \downarrow \\ & & l = l^2 \end{array} \quad \leftarrow \text{uso p.to (iii)}$$

$l = l^2 \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l(l-1) = 0$. Quindi l può essere 0 oppure 1. Ma per il p.to (i) (e qui uso la parte $a_n \leq \frac{3}{4}$) so che l non può essere 1, quindi per forza $l = 0$.

Dim. (i) Dimostro intanto che $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo è vero per $n = 0$ e poi banale per ogni n successivo in quanto $x_{n+1} = x_n^2$ e i quadrati sono ≥ 0 .

Resta da dimostrare che $x_n \leq \frac{3}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Lo dim. per induzione

Passo base $n=0$ $x_0 \leq \frac{3}{4}$ Ovvio perché $x_0 = \frac{3}{4}$.

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \leq \frac{3}{4}$ Tesi: $x_{n+1} \leq \frac{3}{4}$

Dim. $x_{n+1} = x_n^2 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \leq \frac{3}{4}$

↑
uso ricor.

↑
ipotesi elevata al quadrato!

lo posso fare perché so già che $x_n \geq 0$
e x^2 è monotona crescente per $x \geq 0$.

Ho fatto una catena di uguaglianze e disuguaglianze da cui deduco che $x_{n+1} \leq \frac{3}{4}$, che è la tesi.

Dim. (ii)

1° modo: ricorrenza più disuguaglianze

Devo dimostrare che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la ricorrenza questo è come dire $x_n^2 \leq x_n$. Questa è legata alla disuguaglianza $x^2 \leq x$, cioè $x^2 - x \leq 0$, cioè $x(x-1) \leq 0$, cioè $0 \leq x \leq 1$.

Quindi $x_n^2 \leq x_n \Leftrightarrow 0 \leq x_n \leq 1$. Grazie al p.to (i) so che $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$, dunque a maggior ragione $0 \leq x_n \leq 1$, dunque $x_n^2 \leq x_n$, che è quello che volevo.

2° modo: induzione + "applico f"

Voglio dimostrare per induzione che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passo base $n=0$. Devo dim. che $x_1 \leq x_0$, cioè $\frac{9}{16} \leq \frac{3}{4}$, che è vero.

Passo induttivo: Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

regola di
passaggio

Dim. passo induttivo: prendo l'ipotesi $x_{n+1} \leq x_n$ e applico $f(x) = x^2$

Posso farlo senza cambiare i versi? Cioè posso scrivere

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \quad ?$$

Sì, posso perché $f(x) = x^2$ è monotona crescente per $x \geq 0$ e noi sappiamo dal p.to (i) che $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi da $x_{n+1} \leq x_n$ possiamo dedurre che $x_{n+1}^2 \leq x_n^2$
 $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Sostanzialmente: $\rightarrow$ prendo l'ipotesi $(x_{n+1} \leq x_n)$
 $\rightarrow$ applico f $(f(x_{n+1}) \leq f(x_n))$
 $\rightarrow$ ottengo la tesi $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Achtung! Bisogna verificare la possibilità di applicare $f(x)$ conservando i versi.

— o — o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 058

Titolo nota

05/11/2011

Esempio 1 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$ $x_0 = 2011$

Una formula esplicita è molto probabile che non esista.

PIANO

- (i) $x_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$,
- (iv) $l = 2$.

Dim. di (i) inclusione + "applico f" $f(x) = \sqrt{3x-2}$

Passo base: $x_0 \geq 2$, cioè $2011 \geq 2$ banale

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \geq 2$ Tesi: $x_{n+1} \geq 2$

Dim. passo induttivo: prendo l'ipotesi $x_n \geq 2$. Osservo che $f(x)$ è strettamente crescente dove definita, cioè per $x \geq 2/3$. Dall'ipotesi so che sono in questa zona, quindi posso applicare f conservando i versi: ottengo

$$\begin{aligned} f(x_n) &\geq f(2) \\ \text{"} & \\ x_{n+1} &\geq \sqrt{6-2} = 2 \end{aligned}$$

Avevo ottenuto $x_{n+1} \geq 2$, ho dimostrato la tesi.

Dim (ii) inclusione + applico f

Passo base: $x_1 \leq x_0$, cioè $\sqrt{6031} \leq 2011$ vera tranquilla

Passo induttivo: Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim. passo induttivo: prendo $x_{n+1} \leq x_n$. Applico f : (posso per il p.to (i))
 $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$, cioè $x_{n+2} \leq x_{n+1}$, che è la tesi

Dim. (iii) Dal pto (i) so che x_n è debolmente decrescente
 Dal pto (i) so che x_n è limitata inferiormente
 Per il teo. delle succ. monot. si ha che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

Dim. (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ l = \sqrt{3l - 2} & & \end{array}$$

Ho ottenuto l'equazione $l = \sqrt{3l - 2}$, $l^2 = 3l - 2$, $l^2 - 3l + 2 = 0$,
 $(l-2)(l-1) = 0$, soluzioni: $l=1$ e $l=2$ (entrambe superano la
 verifica). I possibili limiti sono $l=1$ e $l=2$, ma $l=1$ non è
 compatibile con il pto (i) del piano. Quindi $l=2$.

— o — o —

Esempio 2 $x_{n+1} = x_n^2 - 20$ $x_0 = 37$

Sembra che x_n sia crescente e $x_n \rightarrow +\infty$.

PIANO (i) $x_n \geq 37$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
 (ii) $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,
 (iv) $l = +\infty$.

Dim. (i) **Induzione + applico f** $f(x) = x^2 - 20$ strett. crescente per $x \geq 0$.

Passo base: $x_0 \geq 37$, cioè $37 \geq 37$, vero

Passo induttivo: **Ipotesi** $x_n \geq 37$ **Tesi**: $x_{n+1} \geq 37$

Dim. prendo l'ipotesi $x_n \geq 37$, osservo che sono nella zona $x \geq 0$,
 quindi applico f conservando i versi

$$\begin{aligned} f(x_n) &\geq f(37) \\ \text{"} & \\ x_{n+1} &\geq 37^2 - 20 \geq 1000 \geq 37 \end{aligned}$$

che implica la tesi.

Dim. (ii) **Induzione + applico f** Devo dim. che $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Esempio 3 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$ $x_0 = \frac{3}{2}$

- PIANO**
- (i) $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (ii) $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ((ii) + (i) + teo. succ. monotone)
 - (iv) $l = 2$. (i possibili limiti sono $l=1$ e $l=2$, ma $l>1$ è incompatibile con (i))

Dim (i) Inclusione + applico f $f(x) = \sqrt{3x-2}$

Passo base $n=0$ $\frac{3}{2} \leq x_0 \leq 2$ banale perché $x_0 = \frac{3}{2}$

Passo induttivo Ipotesi: $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$ Tesi: $\frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq 2$

Dim: prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ (posso perché per ipotesi è tutto sopra $2/3$, cioè nella zona in cui $f(x)$ è crescente). Ottengo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &\leq f(x_n) \leq f(2) \\ \frac{3}{2} &\leq \sqrt{\frac{5}{2}} \leq x_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

↑
spero

Se la speranza funziona ho la tesi. Controllo la speranza

$$\frac{3}{2} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \stackrel{?}{\leq} \frac{5}{2} \Leftrightarrow 18 \stackrel{?}{\leq} 20 \quad \text{OK.}$$

Dim (ii) Inclusione + applico f (Dettagli per esercizio).

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 059

Titolo nota

05/11/2011

Interpretazione grafica delle succ. per ricorrenza autonoma del 1° ordine

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$$

$$x_0 = 2011$$

$$\text{Disegno } f(x) = \sqrt{3x-2}$$

$$\text{Disegno la bisettrice } y=x$$

Bisogna capire $\sqrt{3x-2}$ e x come sono messe tra di loro.

Dove si intersecano? Dove

$$\sqrt{3x-2} = x.$$

Questa ha come soluzioni $x=1$ e $x=2$

(N.B.: è la stessa equazione risolta dai possibili limiti $l \in \mathbb{R}$).

Seguiamo x_0 sull'asse x e poi seguiamo lo slogan "VERTICALE ALLA FUNZIONE, ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE".

Scrivo le coordinate dei p.ti P_i e Q_i così ottenuti

$$P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$$

$$Q_1 = (x_1, x_1)$$

↑ stessa ordinata di P_0
 ↑ ascissa = ordinata perché sta sulla bisettrice

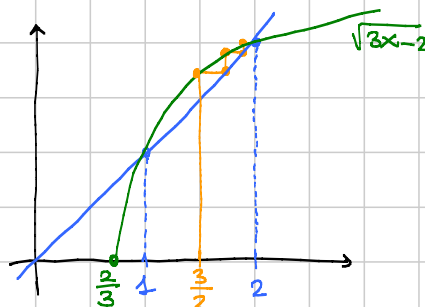
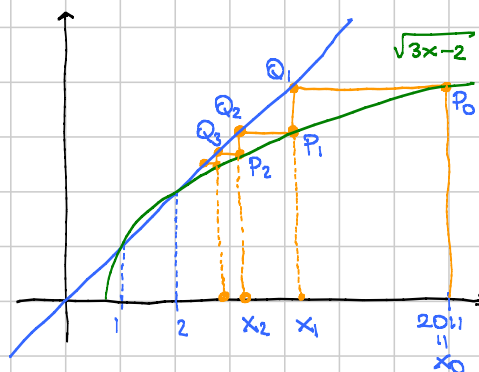
$$P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$$

↑ stessa ascissa di Q_1

$$Q_2 = (x_2, x_2) \text{ per lo stesso motivo di prima.}$$

Procedendo in questo modo, le ascisse dei p.ti così ottenuti sono i valori successivi della successione: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$

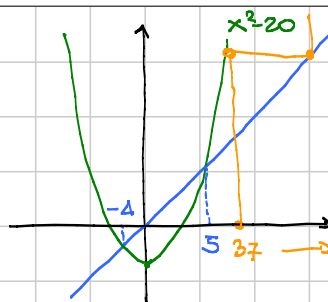
Se invece parto da $x_0 = \frac{3}{2}$ si vede che $x_n \rightarrow 2$ crescendo.



Caso $x_{n+1} = x_n^2 - 20$, $x_0 = 37$

I piani con la monotonia si deducono dal disegno.

Struttura generale del piano con la monotonia



- (i) limitazione di x_n (deve escludere possibili limiti che non vanno bene e magari permettersi di applicare f)
- (ii) crescita o decrescita
- (iii) esistenza del limite (reale, oppure $\pm\infty$)
- (iv) valore di l

Oss. I possibili limiti reali si ottengono risolvendo l'equazione $f(x) = x$.

Basta passare la ricorrenza al limite.

Questo si può fare solo sapendo già che l esiste ed è $\in \mathbb{R}$.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$l = f(l)$$

— 0 — 0 —

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2} \quad x_0 = 2011.$$

PIANO CON LA DISTANZA

Considero la distanza dal presunto limite

$$d_n = |x_n - 2|$$

$\uparrow$ presunto limite

Idea: $d_n \rightarrow 0$. Se dimostro che $d_n \rightarrow 0$, allora

$x_n \rightarrow 2$ (sono equivalenti)

- (i) $x_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $d_{n+1} \leq c d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (c deve essere una costante < 1),
- (iii) $0 \leq d_n \leq c^n d_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e indipendente da n
- (iv) $d_n \rightarrow 0$.

P.to (i) è come nel piano con la monotonia

Dim (iv) P.to (iii) + carabinieri

$$0 \leq d_n \leq c^n d_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

esponenziale con base < 1

Dim. (ii) Il fatto che $d_n \geq 0$ è ovvio perché $d_n = | \dots | \geq 0$

Resta da dimostrare che $d_n \leq c^n \cdot d_0$.

$$\begin{aligned} \text{Idea: } d_1 &\leq c d_0, & d_2 &\leq c d_1 \leq c \cdot c d_0 = c^2 d_0, \\ &\uparrow \text{p.to (ii)} & \uparrow \text{p.to (ii)} & \uparrow d_1 \leq c d_0 \\ d_3 &\leq c d_2 \leq c \cdot c^2 d_0 = c^3 d_0 \\ &\uparrow \text{p.to (ii)} \end{aligned}$$

Formalmente: si fa per induzione su n a partire dal p.to (ii)

Passo base: $d_0 \leq c^0 \cdot d_0$ banale

Passo induttivo Ipotesi: $d_n \leq c^n \cdot d_0$ Tesi: $d_{n+1} \leq c^{n+1} \cdot d_0$

$$\begin{aligned} \text{Dim. } d_{n+1} &\leq c \cdot d_n \leq c \cdot c^n \cdot d_0 = c^{n+1} d_0 \\ &\uparrow \text{p.to (ii)} \quad \uparrow \text{uso ipotesi indutt. per } c \end{aligned}$$

Dim. p.to (ii) Devo dimostrare che $d_{n+1} \leq c d_n$, dove c è una costante < 1 indipendente da n .

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= |x_{n+1} - 2| = \left| \sqrt{3x_n - 2} - 2 \right| = \left| (\sqrt{3x_n - 2} - 2) \cdot \frac{(\sqrt{3x_n - 2} + 2)}{(\sqrt{3x_n - 2} + 2)} \right| \\ &\quad \uparrow \text{def. di } d_{n+1} \quad \uparrow \text{ricorsiva} \quad \uparrow \text{razionalizzo} \quad \text{Fortuna?} \\ &= \frac{|3x_n - 2 - 4|}{\sqrt{3x_n - 2} + 2} = \frac{|3x_n - 6|}{\sqrt{3x_n - 2} + 2} = \frac{3d_n}{\sqrt{3x_n - 2} + 2} \\ &\quad \uparrow \text{calcolo} \end{aligned}$$

Abbiamo così scoperto che $d_{n+1} \leq \frac{3}{\sqrt{3x_n - 2} + 2} \cdot d_n \leq \frac{3}{4} d_n$

Se voglio questo + grande possibile devo mettere x_n più piccolo possibile, e cioè 2 perché dal p.to (i) so che $x_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Oss. Alla fine il piano si scrive con $c = \frac{3}{4}$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 060

Titolo nota

09/11/2011

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1 - Nessuna simmetria

2 - Definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3 - Limiti agli estremi della zona di definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = [e^0] = 1^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = [e^{+\infty}] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = [e^{-\infty}] = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = [e^0] = 1^-$$

4 - Zeri e segno: $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5 - Studio della derivata prima.

 $f'(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0 \text{ sempre,}$$

il che conferma il grafico.



Achtung! È vero che $f(x)$ è monotona (decrecente) in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?
 No! È vero solo che è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.
 Questo perché il legame tra segno della derivata e monotonia vale sugli insiemi convessi (tutto $\mathbb{R}$, semirette, intervalli).

6 - Asintoti: $y=1$ è asintoto orizz. sia per $x \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$
 $x=0$ è " verticale.

7 - Ci aspettiamo che $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^-$ in questo modo.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -e^{+\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad [-\infty \cdot \infty] \quad \text{pongo } y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} -y^2 e^y = \lim_{z \rightarrow +\infty} -z^2 e^{-z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-z^2}{e^z} = 0$$

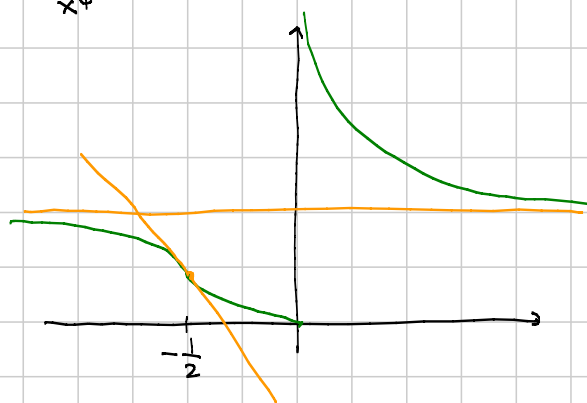
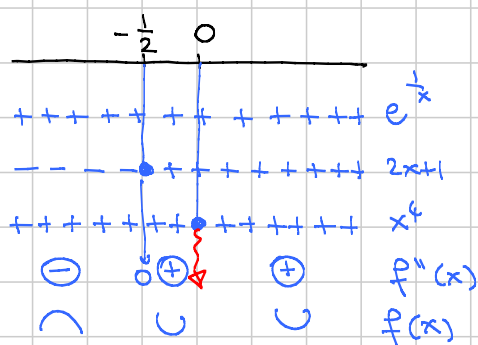
pongo $z = -y$

Questo dice che la retta tangente tende a diventare orizzontale quando $x \rightarrow 0^-$. Ci aspettiamo dunque un flesso per x negativi.

8- Studio della derivata 2ª. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$$f''(x) = + \left\{ +2 \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(+\frac{1}{x^2} \right) \right\}$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left\{ \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right\} = e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x^4}$$



Per esercizio calcolare l'eq. del flesso.

9- $e^{\frac{1}{x}}$ è Lipschitziana in $(-\infty, 0)$? Sì!

La Lipschitzianità è legata alla limitatezza della derivata prima

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in (-\infty, 0) \} = \sup \left\{ \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} : x \in (-\infty, 0) \right\}$$

Per vedere se il sup è finito, studio a sua volta $g(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ in $(-\infty, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^+$$

Per una delle varianti di Weierstrass, si vede che $g(x)$ ammette max, quindi il sup è finito.



Esercizio 2 Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^\lambda = \lambda$.

Studio $f(x) = x^\lambda$

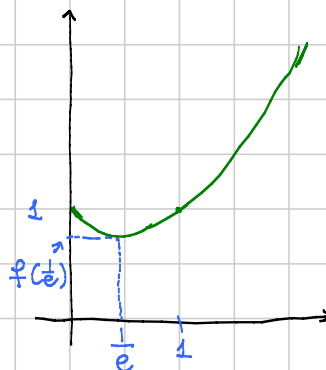
1- Definita e continua per $x > 0$

2- Limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda = [+\infty^{+\infty}] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\lambda = [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = e^0 = 1^-$$

Da queste informazioni, unite al fatto che $f(1) = 1$, ci aspettiamo un p.to di minimo per $x \in (0, 1)$



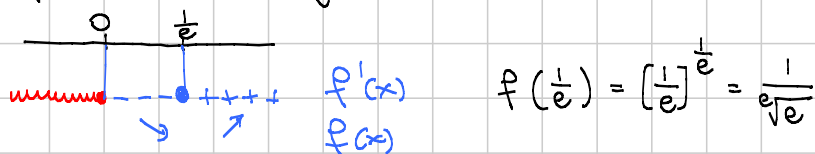
$$\begin{aligned} 3- \text{Studio di } f'(x) &= [e^{x \log x}]' = e^{x \log x} [x \log x]' \\ &= x^\lambda \cdot \left\{ \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right\} = \boxed{x^\lambda} \{ \log x + 1 \} \end{aligned}$$

Quindi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \log x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$



$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left[\frac{1}{e}\right]^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{1/e}}$$

Quindi al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ avremo

0 soluzioni se $\lambda < \frac{1}{e^{1/e}}$

1 soluzione se $\lambda \in \left\{ \frac{1}{e^{1/e}} \right\} \cup [1, +\infty)$ (per $\lambda = 1$ c'è solo la sol. $x = 1$)

2 soluzioni se $\lambda \in \left(\frac{1}{e^{1/e}}, 1 \right)$

Osservazione 1 Per rispondere alla domanda del testo non serve a nulla studiare $f''(x)$ o cose simili.
Inutile fare cose in più

Osservazione 2 Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di

$$x^x = 3^{\lambda^2}$$

Soluzione rigurata: ricavo λ $\lambda^2 = \log_3 x^x$ $\lambda = \pm \sqrt{\log_3 x^x}$
e studio la funzione risultante...

Soluzione alternativa: pongo $3^{\lambda^2} = A$ e così mi riduco a $x^x = A$.
Questa ha

- 0 soluzioni se $A < \frac{1}{e^{1/e}}$, cioè se $\boxed{3^{\lambda^2}} < \boxed{\frac{1}{e^{1/e}}}$, quindi mai

$\uparrow$ $\uparrow$
 sempre ≥ 1 < 1
- 2 soluzioni se $\frac{1}{e^{1/e}} < A < 1$, cioè se $\frac{1}{e^{1/e}} < \boxed{3^{\lambda^2}} < 1$, quindi mai
- 1 soluzione se $A \geq 1$ (più un caso), cioè se $3^{\lambda^2} \geq 1$, quindi

sempre.

Quindi $x^x = 3^{\lambda^2}$ ha soluzione unica per
ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 061

Titolo nota

09/11/2011

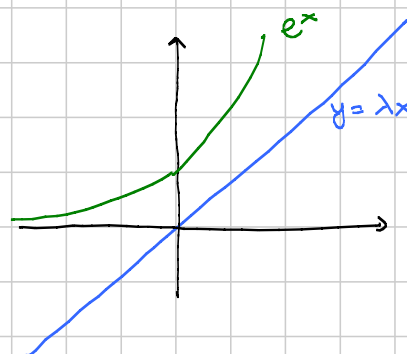
Esercizio 1 Trovare la più grande costante $\lambda > 0$ tale che

$$e^x \geq \lambda x$$

 per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Cosa vuol dire graficamente?

Si tratta di trovare il valore di λ per cui la retta $y = \lambda x$ risulta tangente al grafico di $y = e^x$.



1° modo: SOTTRARRE. Pongo

$$f(x) = e^x - \lambda x$$

La richiesta è equivalente a dire $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi studio la funzione con il parametro λ ed impongo che il suo min (o inf) sia ≥ 0 .

2° modo: DIVIDERE. Vorrei scrivere $\frac{e^x}{x} \geq \lambda$, ma posso solo per $x > 0$. Allora

- osservo che per $x \leq 0$ la richiesta $e^x \geq \lambda x$ è sempre soddisfatta
- per $x > 0$ posso dividere e mi riduco a

$$\frac{e^x}{x} \geq \lambda$$

Se Voglio che questa sia vera per ogni $x > 0$, λ deve essere minore o uguale del minimo di $\frac{e^x}{x}$ per $x > 0$.

Realizzazione del 2° modo: devo calcolare il minimo di $f(x) = \frac{e^x}{x}$ per $x > 0$. Studio la funzione.
 Basterebbe studiarla per $x > 0$,

1 - Simmetrie: nessuna

2 - Definita e continua per $x \neq 0$

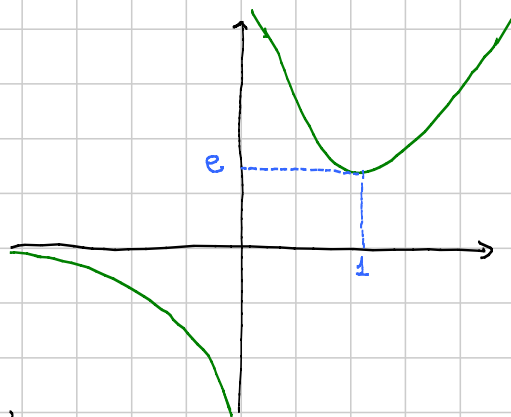
3 - Limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{esponenziale batte polinoma})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \left[= \frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \left[= \frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{0^+}{-\infty} \right] = 0^-$$

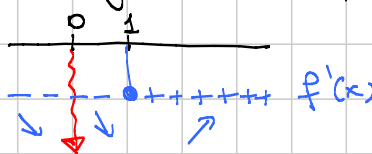


4 - Sulla base dei limiti a 0^+ e a $+\infty$, una variante di Weierstrass garantisce l'esistenza di $\min \{ f(x) : x > 0 \}$ (dimostrare!)

5 - Studio di $f'(x)$, che esiste per ogni $x \neq 0$.

$$f'(x) = \left[\frac{e^x}{x} \right]' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

Poiché $x \neq 0$, abbiamo che il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno di $x-1$, quindi



Abbiamo così dimostrato che $f(x) \geq \lambda$ per ogni $x > 0$ se e solo se $\lambda \leq e$ (perché e è il minimo).

Realizzazione del 1° modo Devo studiare $f(x) = e^x - \lambda x$, dove λ è un parametro.

1 - Nessuna simmetria

2 - Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

3 - Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [0 - (-\infty)] = +\infty$
uso che $\lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [= +\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \left\{ 1 - \underbrace{\lambda \frac{x}{e^x}}_{0} \right\} = +\infty$$

4 - Weierstrass generalizzato garantisce l'esistenza di un pto di minimo.

5 - Studio di $f'(x) = e^x - \lambda$. Quindi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda = 0 \Leftrightarrow x = \log \lambda$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda > 0 \Leftrightarrow x > \log \lambda$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda < 0 \Leftrightarrow x < \log \lambda$$



Il valore del minimo è dunque $f(\log \lambda) = e^{\log \lambda} - \lambda \log \lambda$.

Nel sistema λ voglio che tale minimo sia ≥ 0 .

Questo accade se e solo se

$$e^{\log \lambda} - \lambda \log \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda \log \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda}_{>0} (1 - \log \lambda) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \log \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \log \lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq e$$

Quindi il massimo λ che va bene è $\lambda = e$.

— 0 — 0 —

Esercizio 2 $\inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : \arctan(x^2) \leq \lambda \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \} = \frac{\pi}{2}$
 $\sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : \arctan(x^2) \geq \lambda \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \} = 0$

Disegno rapido di $f(x) = \arctan(x^2)$

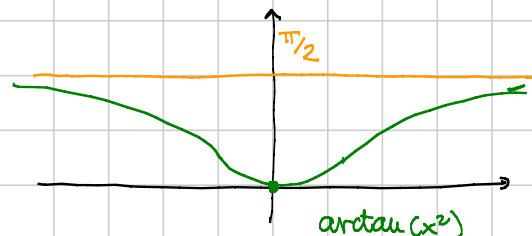
Ho osservato che:

1 - È pari

$$2 \rightarrow f(0) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

3 - $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

4 - f è strett. crescente per $x > 0$



Il primo insieme è costituito da tutti i $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$

Il secondo insieme è costituito da tutti i $\lambda \leq 0$

Esercizio 3 Calcolare $\max \{ n^2 2^{-n} : n \in \mathbb{N} \}$

Se l'esercizio fosse: calcolare $\max \{ x^2 2^{-x} : x \geq 0 \}$ si tratterebbe di studiare $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$ per $x \geq 0$ (o anche per ogni $x \in \mathbb{R}$)

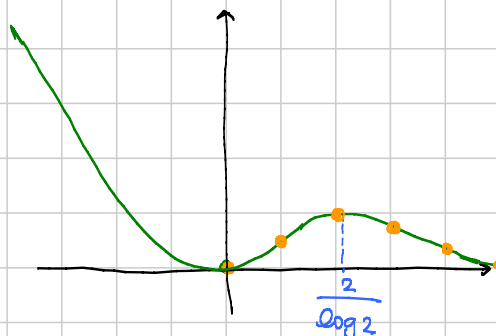
1 - Niente simmetrie

2 - Definita e continua in $\mathbb{R}$

3 - Limiti agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0^+$$

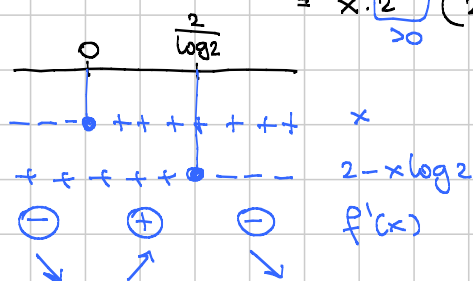
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [+ \infty \cdot + \infty] = +\infty$$



4 - Zeri e segno: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
e $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Nota bene: $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

5 - Studio di $f'(x) = 2x \cdot 2^{-x} - x^2 \cdot 2^{-x} \log 2$
 $= x \cdot \underbrace{2^{-x}}_{>0} (2 - x \log 2)$



$f\left(\frac{2}{\log 2}\right)$ si può calcolare ... quindi

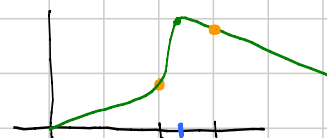
$$\max \{ x^2 \cdot 2^{-x} : x \geq 0 \} = f\left(\frac{2}{\log 2}\right)$$

Cosa succede su $\mathbb{N}$? Vuol dire considerare sul grafico solo i p.ti con coordinata x intera.

Risposta sbagliata: il p.to di max su $\mathbb{N}$ è l'intero più vicino a $\frac{2}{\log 2}$

Risposta giusta: se lo cerchiamo sempre il p.to intero a dx e quello a sx. Sostituisco fino a quando scende

— 0 — 0 —



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 062

Titolo nota

10/11/2011

Successioni per ricorrenza spiraleggianti

Esempio $x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2} \quad x_0 = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{3}{x+2}$ Dove interseca la bisettrice?

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} = x \Leftrightarrow 3 = x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = 1$$

Idea dal disegno: x_n tende ad 1 spiraleggiando, cioè alternando dx e sx

Due possibili approcci $\nearrow$ con la distanza
 $\searrow$ con le due sottosuccessioni

Piano con la distanza Pongo $d_n = |x_n - 1|$ (distanza dal presunto limite)
 e dimostro che $d_n \rightarrow 0$, il che è equivalente a
 dire che $x_n \rightarrow 1$.

Tipologia di piano:

- (i) x_n sta in una certa zona per ogni $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $d_{n+1} \leq c d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $c < 1$ non dipende da n
- (iii) $0 \leq d_n \leq c^n d_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (iv) $d_n \rightarrow 0$.

Dim. (iii) Facile inclusione a partire dal p.to (ii) (forse!)

Dim. (iv) Teorema dei carabinieri a partire dal p.to (iii):

$$0 \leq d_n \leq c^n d_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

perché esponenziale con base $c < 1$ (ovviamente $c > 0$)

Punto (i): $x_0 \leq x_n \leq x_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{3}{x_0+2} = \frac{3}{\frac{1}{2}+2} = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

Quindi (i) $\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{6}{5}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Dim. (i) 1° modo: risolvere le disequazioni (provare...)

2° modo: induzione + applico $f(x)$

Passo base: $n=0$ $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq \frac{6}{5}$ banale perché $x_0 = \frac{1}{2}$

Passo induttivo. Ipotesi: $\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{6}{5}$ Tesi: $\frac{1}{2} \leq x_{n+1} \leq \frac{6}{5}$

Dim. Prendo l'ipotesi e applico $f(x)$. Poiché $f(x)$ è strettamente decrescente nella zona in questione ($x \in [\frac{1}{2}, \frac{6}{5}]$) lo posso fare, ma devo invertire i versi

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3}{\frac{6}{5}+2} = 3 \cdot \frac{5}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &\geq f(x_n) \geq f\left(\frac{6}{5}\right) \\ \frac{6}{5} &\geq x_{n+1} \geq \frac{15}{16} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi ho ottenuto la tesi.

Resta da fare il p.to (ii) cercando di capire chi è c .

Dim. (ii) "A mano";

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| \stackrel{\text{def. di } d_{n+1}}{=} \left| \frac{3}{x_n+2} - 1 \right| \stackrel{\text{uso ric.}}{=} \frac{|3-x_n-2|}{|x_n+2|} = \frac{|1-x_n|}{x_n+2} = \frac{|x_n-1|}{x_n+2}$$

$$= \frac{d_n}{x_n+2} \leq \frac{d_n}{\frac{1}{2}+2} = \frac{2}{5} d_n$$

Metto il valore più piccolo possibile per x_n

Quindi ho dimostrato il p.to (ii) con $c = \frac{2}{5}$.

Dim. alternativa del p.to (ii) : Lipschitzianità o Lagrange

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= |x_{n+1} - 1| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricorrenza} \\ f(1)=1}}{|f(x_n) - f(1)|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teo. Lagrange} \\ f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)}}{|f'(\xi)| \cdot |x_n - 1|} \\
 &= |f'(\xi)| \cdot d_n \\
 &\leq \max\{|f'(x)| : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\} \cdot d_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max\{|f'(x)| : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\} &= \max\left\{\left|\frac{-3}{(x+2)^2}\right| : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\right\} \\
 &= \max\left\{\frac{3}{(x+2)^2} : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\right\} \\
 &= \frac{3}{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2} = 3 \cdot \frac{4}{25} = \frac{12}{25}
 \end{aligned}$$

In questo modo ottengo $d_{n+1} \leq \frac{12}{25} d_n$ e va bene perché $c < 1$.

- PIANO**
- (i) $\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{6}{5}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $d_{n+1} \leq \frac{12}{25} d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (opp. $d_{n+1} \leq \frac{12}{25} d_n$)
 - (iii) $0 \leq d_n \leq \left(\frac{12}{25}\right)^n d_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
 - (iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $x_n \rightarrow 1$.

Oss. 1 Se volessi dimostrare che $x_n \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, non potrei farlo per induzione perché il fatto che $x \geq \frac{1}{2}$ non garantisce che $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

Oss. 2 Piano alternativo : (i) $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)
 (ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$ ~
 (iii) e (iv) soliti (soliti)

Dim. nuovo p.to (ii) : a mano come prima si arriva a

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vedi sopra}}}{\frac{d_n}{x_{n+2}}} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che } x_n \geq 0}}{\frac{d_n}{2}}
 \end{aligned}$$

Piano con le due sottosuccessioni

Idea: x_n non è monotona, ma

- x_{2n} = sottosuccessione dei pari
è monotona crescente
- x_{2n+1} = sottosuccessione dei dispari
è monotona decrescente

PIANO

$$(i) \quad \frac{1}{2} \leq x_{2n} \leq 1 \\ 1 \leq x_{2n+1} \leq \frac{6}{5} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad x_{2n+2} \geq x_{2n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \text{(crescente sui pari)} \\ x_{2n+3} \leq x_{2n+1} \quad \text{(decrescente sui dispari)}$$

$$(iii) \quad x_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \\ x_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad l = m = 1.$$

Dal (iii) ... Teorema delle successioni monotone applicato a x_{2n} e x_{2n+1}

Dal (iv) Scrivo la ricorrenza e passo al limite!

$$x_{2n+1} = \frac{3}{x_{2n} + 2} \\ \downarrow \\ m = \frac{3}{l+2}$$

$$x_{2n+2} = \frac{3}{x_{2n+1} + 2} \\ \downarrow \\ l = \frac{3}{m+2}$$

Dove prima avevo una equazione in l , ora ho un sistema in m ed l .
Risolvo il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{3}{l+2} \\ l = \frac{3}{m+2} \end{cases} \quad \begin{cases} ml + 2m = 3 \\ lm + 2l = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sottraendo ottengo } m=l \text{ e poi} \\ \text{sostituendo } l^2 + 2l - 3 = 0, \text{ cioè} \\ l = 1 \text{ oppure } l = -3, \text{ ma quest'ultimo} \\ \text{non è compatibile con p.to (i).} \end{array}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 063

Titolo nota

10/11/2011

Esempio $x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2} \quad x_0 = \frac{1}{2}$

PIANO CON 2 SOTTOSUCCESIONI

(i) $\frac{1}{2} \leq x_{2m} \leq 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$1 \leq x_{2m+1} \leq \frac{6}{5} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{2m+2} \geq x_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$x_{2m+3} \leq x_{2m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R}, x_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

(iv) $l = m = 1.$

Dim. di (i) Per $n=0$ abbiamo che $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$

Applico $f(x)$ invertendo i versi perchè è strett. decrescente

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x_0) \geq f(1)$$

$$\frac{6}{5} \geq x_1 \geq 1 \quad \text{che è quello che serve con } n=1$$

Applico nuovamente $f(x)$ invertendo nuovamente i versi:

$$f\left(\frac{6}{5}\right) \leq f(x_1) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{15}{16} \leq x_2 \leq 1 \quad \text{che è quello che serve per } x_2.$$

Ora sappiamo che $\frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1$, quindi applicando $f(x)$ e invertendo

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x_2) \geq f(1)$$

$$\frac{6}{5} \geq x_3 \geq 1 \quad \text{che è quello che volevamo per } x_3.$$

E così via: prendendo l'informazione ottenuta per un certo x_n e applicando $f(x)$, si ottiene l'informazione voluta per x_{n+1} .

Dim. di (ii) $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{15}{16}.$

Quindi $x_0 \leq x_2$. Applico $f(x)$: $f(x_0) \geq f(x_2)$, cioè $x_1 \geq x_3$.

Dimostrazione alternativa della posizione dei 2 grafici:

$$\arctan \frac{x}{2} < \frac{x}{2} < x$$

$\uparrow$
 vero per $x > 0$
 disuguaglianza classica
 $\arctan y < y \quad \forall y > 0$

- PIANO**
- (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)
 - (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (dec. + lim. sup. + teo. succ. monotone)
 - (iv) $l = 0$

Dim (ii) 1° modo: ricorrenza + disuguaglianza

Devo dimostrare che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè che $\arctan \frac{x_n}{2} \leq x_n$, il che riconduce alla disuguaglianza $\arctan \frac{x}{2} \leq x$, che dallo studio della $g(x)$ sappiamo avere come soluzione $x \geq 0$. Quindi $x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n \geq 0$, ma questo è vero per il p.to (i).

2° modo: induzione + applico f

Passo base: $x_1 \leq x_0$, cioè
 $\arctan \frac{2011}{2} \leq 2011$, vero perché
 $\arctan \frac{2011}{2} \leq \frac{\pi}{2} \leq 2011$

Passo induttivo: Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim: prendo l'ipotesi, applico $f(x) = \arctan \frac{x}{2}$ e grazie i versi coinvolti in quanto $f(x)$ è monotona crescente
 $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$, cioè $x_{n+2} \leq x_{n+1}$ che è la tesi

Dim (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \arctan \frac{x_n}{2}$$

$$\downarrow$$

$$l = \arctan \frac{l}{2}$$

Nel risolvere l'eq. $l = f(l)$ torna utile lo studio di $g(x)$ iniziale.

Ultima domanda: come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$?

Abbiamo appena dimostrato che $x_n \rightarrow 0$, quindi c'è la condizione necessaria. Provo con il criterio del rapporto.
Intanto osservo che $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{x_n}{2}}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} < 1$$

uso ricorrenza
Pongo $x = x_n$
Quando $n \rightarrow +\infty$
ho che $x \rightarrow 0$

Quindi la serie converge.

Come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} n^{100} \cdot x_n$?

Pongo $a_n = n^{100} \cdot x_n$ e applico il criterio del rapporto:

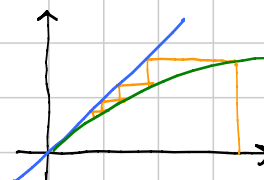
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{100} x_{n+1}}{n^{100} \cdot x_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{100} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$$

$\downarrow$
1
 $\downarrow$
 $\frac{1}{2}$ visto prima
la serie converge.

Esercizio (hard) $x_{n+1} = \arctan x_n$ $x_0 = 2011$

Si vede facilmente (easy) che $x_n \rightarrow 0$

Domanda: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o peggio $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$



Esercizio (medium) $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}$ $x_0 = \frac{1}{2}$

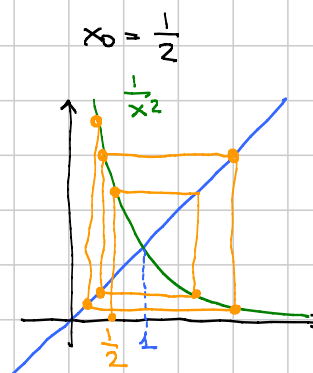
Idea: spiraleggiamento uscente,

con

$$x_{2n} \rightarrow 0$$

$$x_{2n+1} \rightarrow +\infty$$

Dimostrare con le due sottosuccessioni...



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 064

Titolo nota

11/11/2011

Successioni per ricorrenza non autonome

L'unica regola è che non ci sono regole.

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n}{3+\sqrt{n}}$ $x_0 = 2011$ Non c'è una funzione da disegnare

Idea: x_n tende a 0 decrescendo.1° modo: piano con MONOTONIA(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (iv) $l = 0$ Dim. (i) Per induzione. Passo base: banale $2011 \geq 0 \dots$ Passo induttivo Ipotesi: $x_n \geq 0$ Tesi: $x_{n+1} \geq 0$

Dim. $x_{n+1} = \frac{\boxed{x_n}}{\boxed{3+\sqrt{n}}} \geq 0$

↑
uso ricorrenza

≥ 0 per ipotesi

Dim. (ii) Ricorrenza più diseguale. Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè

$$\frac{x_n}{3+\sqrt{n}} \leq x_n$$

Moltiplico per $3+\sqrt{n}$ che è > 0 , quindi non cambio i versi

$$x_n \leq 3x_n + \sqrt{n}x_n, \quad \boxed{x_n} \boxed{(2+\sqrt{n})} \geq 0 \quad \text{Ok,}$$

↓
dimostrato al pto (i)

Dim. (iii) Per il pto (i) ho che x_n è limitata inferiormente

Per il pto (ii) " " " " debolmente decrescente

Quindi per il tes delle succ. monotone ho che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Dim. (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3 + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{l}{+\infty} = 0$$

Achtung! Non scrivere mai
 $\frac{x_n}{3 + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{l}{3 + \sqrt{n}} \rightarrow 0$
 perché è limite metà per volta.

Oss. Nel p.to (iv) è fondamentale sapere già che $l \in \mathbb{R}$ (altrimenti se fosse $l = \pm \infty$ non potrei dire nulla della formula $\frac{l}{+\infty}$)
 — 0 — 0 —

2° modo: criterio del rapporto

(i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 0$

(iii) $x_n \rightarrow 0$.

Dim. (i) Induzione come prima.

Dim. (ii) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{x_n}}{\sqrt{n} + 3} \cdot \frac{1}{\cancel{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{n} + 3} \rightarrow 0$
 uso ric,

Dim. (iii) Criterio del rapporto applicato alla successione x_n .

Oss. Questo stesso piano dice anche che $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge
 — 0 — 0 —

3° modo: LIMITATEZZA + CARABINIERI

(i) $0 \leq x_n \leq 2011 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim. (i) La parte $x_n \geq 0$ si dimostra per induzione come prima

Dimostro che $x_n \leq 2011$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per induzione.

Passo base $n=0$: $x_0 \leq 2011$ ovvio ($x_0 = 2011$)

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \leq 2011$ Tesi: $x_{n+1} \leq 2011$

Dim. $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n} + 3} \leq \frac{x_n}{3} \leq \frac{2011}{3} \leq 2011$, che è proprio la tesi.
 uso ric., Denom. + piccolo Num. > 0 uso Hp

Dal (i) Dal pto (i) so che $0 \leq x_n \leq 2011$. Divido per $3 + \sqrt{n}$ senza cambiare i versi

$$\frac{0}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{x_n}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{2011}{\sqrt{n}+3} \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{0} \leq \boxed{x_{n+1}} \leq \boxed{\frac{2011}{\sqrt{n}+3}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Per il teorema dei carabinieri abbiamo che $x_{n+1} \rightarrow 0$, ma allora anche $x_n \rightarrow 0$ (è il discorso delle sottosuccessioni "giuste")

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \quad x_0 = 2011$

Tentativo di fare il rapporto: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{x_n}$

Non se ne va x_n , quindi non sembra semplice concludere...

Tentativo di fare la monotonìa: al pto (ii) ci troviamo a dir. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè

$$\frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \leq x_n$$

e questa non è del tutto ovvia. In realtà

$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n} x_n}{3 + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n} x_n}{\sqrt{n}} = x_n$$

uso disug. classica
 $\arctan x \leq x$ che vale
 per ogni $x \geq 0$, quindi serve
 sapere che $x_n \geq 0$ sempre

denom.
 più piccolo

Si potrebbe quindi fare anche un piano con la monotonìa

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(facile per induzione)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(fatto sopra usando che $x_n \geq 0$)

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(solita storia)

(iv) $l = 0$

Dim. (co) Vorrei passare al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{\sqrt{n} + 3}$$

$\downarrow$
 l

Facendo il limite di $\sqrt{n} \cdot x_n$ viene $l \cdot +\infty$, e se $l=0$ questo è un problema.

Ritornando: per i pti (i) e (iii) sappiamo che $l=0$ oppure $l>0$.

Se $l=0$ allora abbiamo finito.

Se per assurdo fosse $l>0$, allora avrei che $\sqrt{n} \cdot x_n \rightarrow +\infty$, quindi potrei completare il limite scrivendo

$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{\sqrt{n} + 3}$$

$\downarrow$
 l

Quindi $l=0$, il che è assurdo essendo partiti da $l>0$.

Soluzione diretta con i carabinieri

$$-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}+3}$$

Per il teorema dei carabinieri abbiamo che $x_{n+1} \rightarrow 0$, ma per il solito motivo questo è equivalente a dire che $x_n \rightarrow 0$.

Come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$? Purtroppo il confronto ci dice che è $\leq$ di una serie che si comporta come $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, quindi dal confronto non si può dire nulla...
(esercizio Hard...).

ANALISI MATEMATICA I — LEZIONE 065

Titolo nota

11/11/2011

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n + n}{2n+3}$ $x_0 = 2011$

Idea: decresce e tende a ... boh! Tentiamo un p.to (iv) ...

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora passando al limite

$$x_{n+1} = \frac{x_n + n}{2n+3} = \frac{n \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)} \quad \begin{array}{l} \text{perché è } \frac{l}{+\infty} \text{ con } l \in \mathbb{R} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ l \quad = \quad \frac{1}{2} \quad \quad 0 \end{array}$$

Conclusione: Se x_n ha un limite reale, allora $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Piano con la monotonia

(i) $x_n \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (adito)

(iv) $l = \frac{1}{2}$ (fatto sopra dando (ii) per ok)

Dim. (i) Induzione. Passo base: banale

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \geq \frac{1}{2}$ tesi: $x_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

$$\text{Dim. } x_{n+1} = \frac{x_n + n}{2n+3} \geq \frac{\frac{1}{2} + n}{2n+3} = \frac{2n+1}{2(2n+3)} \geq \frac{1}{2}$$

$\uparrow$ uso Hp $\uparrow$ spero

Controllo la speranza: $\frac{2n+1}{2(2n+3)} \geq \frac{1}{2}$; $2n+1 \geq 2n+3$ FALSO!

Quindi il p.to (i) per induzione non si dimostra...

Dim. (ii) Riconvenga + disuguaglianze: devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè

$$\frac{x_n + n}{2n+3} \leq x_n, \quad x_n + n \leq 2n x_n + 3x_n, \quad 2x_n + 2n x_n \geq n, \\ 2(n+1)x_n \geq n, \quad \text{cioè } x_n \geq \frac{n}{2(n+1)}$$

Il problema è che non so che $x_n \geq \frac{n}{2(n+1)}$ --,

Possibile rimedio: aggiungere il pto (i) richiedendo questa condizione, oppure cambiare totalmente strada.

Secondo tentativo: Diminuitatezza + carabinieri (i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$

Dim (i) Dim. per induzione che $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione... da fare!)

Dim. per induzione che $x_n \leq 10.000$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passo base: banale

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq 10.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 10.000$

$$\begin{aligned} \text{Dim.} \quad x_{n+1} &= \frac{x_n + n}{2n+3} = \frac{x_n}{2n+3} + \frac{n}{2n+3} \leq \frac{10.000}{2n+3} + \frac{n}{2n+3} \\ &\quad \uparrow \text{uso ipotesi} \\ &\quad \text{divisa per } 2n+3 \\ &\leq \frac{10.000}{3} + \frac{n}{2n} \leq 4.000 + \frac{1}{2} \leq 10.000 \\ &\quad \uparrow \text{denominatori} \\ &\quad \text{più piccoli} \end{aligned}$$

La catena di disuguaglianze dice che $x_{n+1} \leq 10.000$ che è la tesi.

Dim (ii) Dal pto (i) sappiamo che $0 \leq x_n \leq 10.000$, quindi
 $n \leq x_n + n \leq 10.000 + n$. Ora divido per $2n+3$ e ottengo

$$\frac{n}{2n+3} \leq \frac{x_n + n}{2n+3} \leq \frac{10.000 + n}{2n+3}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

Per i carabinieri ho che $x_{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$, quindi anche $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Esercizio: provare il piano con

(i) $x_n \geq \frac{n}{2(n+1)}$	$\forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_{n+1} \leq x_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$	(iv) $l = \frac{1}{2}$

Esempio 2 $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80}$ $x_1 = 2011$ (N.B.: $x_2 = \sqrt[2]{x_1 + 80} = 2091$)

Idea: $x_n \rightarrow 1$. PIANO (i) $1 \leq x_n \leq 3.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \rightarrow 1$

Dim. (i) La disug. $x_n \geq 1$ è facile per induzione (fine!)

Dim. per induzione che $x_n \leq 3.000$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Passo base: ovvio

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq 3.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 3.000$

$$\text{Dim. } x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80} \leq \sqrt[n]{3.000 + 80} \leq \sqrt[n]{3.080} \leq 3.000$$

$\uparrow$ uso ricor. $\uparrow$ uso ipotesi e monotonia di $\sqrt[n]{x}$ $\uparrow$ se $n \geq 2$

Quindi il passo induttivo è OK se $n \geq 2$. | | | | |
1 2 3 4 5 6

Quindi il passo base deve essere $n=1$, ma anche $n=2$. Quindi controllo $n=1 \Rightarrow x_1 = 2011 \leq 3.000$ $n=2 \Rightarrow x_2 = 2091 \leq 3.000$.

Dim (ii) Grazie al pto (i) e alla monotonia di $\sqrt[n]{x}$ sappiamo che

$$\sqrt[n]{81} \leq \sqrt[n]{x_n + 80} \leq \sqrt[n]{3.080}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
1 1 1

Salta conclusione con i carabinieri,
— o — o —

Esempio 3 $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80n}$ $x_1 = 2011$

facile Delicato

Primo tentativo: (i) $1 \leq x_n \leq 3.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow 1$ (dato il pto (i), questo è facile)

Provo a dim che $x_n \leq 3.000$...

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80n} \leq \sqrt[n]{3000 + 80n} \leq 3.000$$

$\uparrow$ ric. $\uparrow$ ipotesi induttiva $\uparrow$ pto

La speranza è equivalente a $3.000 + 80n \leq 3.000^n$. Questo definitivamente è vero, ma dovrei

* capire quando inizia ad essere vero

* controllare tutti i passi base fino a quel p.to...

Alternativa: (i) $1 \leq x_n \leq 3.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow 1$ (ancora carabiniere)

Dici che $x_n \leq 3.000n$ Faccio solo il passo induttivo

Ipotesi: $x_n \leq 3.000n$ Tesi: $x_{n+1} \leq 3.000 + 3.000n$

$$\text{Dim. } x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n.c.}}}{\leq} \sqrt[n]{3.000n + 80n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{\leq} \sqrt[n]{3.080n} = \sqrt[n]{3.080} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spiro}}}{\leq} 3.000n$$

Controllo da speranza: $\sqrt[n]{3.080n} \leq 3.000n \Leftrightarrow \sqrt[n]{3.080} \cdot \sqrt[n]{n} \leq 3.000n$

Appena $n \geq 2$ ho che

$$\sqrt[n]{3.080} \leq \sqrt{3.080} \leq 3.000$$

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt{n} \leq n$$

Quindi devo solo controllare i passi base $n=1$ e $n=2$.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 066

Titolo nota

11/11/2011

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \quad x_1 = 1$

Idea: $x_n \rightarrow 0$ decrescente ($x_2 = 1$, $x_3 = \frac{x_2^2}{2} = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{x_3^2}{3} = \frac{1}{12}, \dots$)

PIANO 1 (i) $0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim. (i) La parte $x_n \geq 0$ è ovvia. Dim. che $x_n \leq 1$ per induzione

Passo base: $n=1$ ovvio $1 \leq 1$

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq 1$ Tesi: $x_{n+1} \leq 1$

Dim. $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$

$\uparrow$ ricor.
 $\uparrow$ uso ipotesi e il fatto che x^2 è crescente per $x \geq 0$ e lo so già che $x_n \geq 0$
 $\uparrow$ ovvio per $n \geq 1$

La catena di disuguaglianze dice che $x_{n+1} \leq 1$, che è la tesi.

Dim. (ii) Grazie al pto. (i) sappiamo che $0 \leq \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0

da cui $x_{n+1} \rightarrow 0$, quindi anche $x_n \rightarrow 0$.

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \quad x_1 = 2$

[Oscillatà: $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $l \quad \frac{l^2}{n} \rightarrow 0$ **quindi $l=0$]**

Calcolo i primi valori: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{x_1^2}{1} = 4$, $x_3 = \frac{x_2^2}{2} = 8$
 $x_4 = \frac{x_3^2}{3} = \frac{64}{3}$

Idea: x_n tende a $+\infty$.

PIANO (i) $x_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$ (ovvio per confronto una volta fatto il p.to (i)).

Dim. (i) Per induzione.

Passo base: $n=1$ viene $x_1 \geq 2$ banalmente vero ($x_1=2$)

Passo induttivo: ipotesi: $x_n \geq 2^n$ Tesi: $x_{n+1} \geq 2^{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Dim.} & x_{n+1} & = & \frac{x_n^2}{n} & \geq & \frac{(2^n)^2}{n} & \geq 2^{n+1} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ & \text{ric.} & & \text{uso ipotesi} & & \text{spero} & \\ & & & \text{monotonia di } x^2 & & & \\ & & & \text{per } x \geq 0 & & & \end{array}$$

Controllo la speranza: $\frac{2^{2n}}{n} \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}, \quad 2^{2n} \stackrel{?}{\geq} n \cdot 2^{n+1}, \quad 2^{n-1} \stackrel{?}{\geq} n$

A sua volta questa disuguaglianza si può dimostrare per induzione oppure usando Bernoulli:

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

$(1+x)^k \geq 1+kx$
 con $x=1$ e $k=n-1$

Quindi la speranza è ok per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque anche il passaggio induttivo è ok per ogni $n \in \mathbb{N}$.

— o — o —

Piano alternativo più corto: (i) $x_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim di (i): --- passo induttivo ---. Ipotesi: $x_n \geq n$ Tesi: $x_{n+1} \geq n+1$

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n+1} & = & \frac{x_n^2}{n} & \geq & \frac{n^2}{n} & = & n \\ & \uparrow & & \uparrow & & & \\ & \text{ric.} & & \text{Hp} & & & \end{array}$$

che non basta perché volevo $x_{n+1} \geq n+1$
Quindi così non funziona.

Forse funzionava: (i) $x_n \geq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \dots$

$$\dots \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{n^4}{n} = n^3 \geq (n+1)^2$$

$\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ questa è vera da un certo n
 quantificabile in poi, e non mi resta
 che controllare i passi base fino a
 quel p.to.

PIANO (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ovvio) $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \quad x_1 = 2$
 (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (ovvio dati (i) e (ii))
 (iv) $l = 0$ (ovvio dato (iii) + fatto all'inizio)

Dim. di (ii) Ricomincia + diseguaglianze. Devo dimostrare che
 $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $\frac{x_n^2}{n} \leq x_n$, il che si riduce a
 $x^2 \leq nx$, cioè $x^2 - nx \leq 0$, cioè $x \in [0, n]$, il
 che definitivamente è vero....

— 0 — 0 —

Esempio 3 $x_{n+1} = 7 + \frac{n^{20}}{2^n} x_n \quad x_1 = 2011$

$$x_2 = 7 + \frac{1}{2} x_1 \sim 7 + 1.000 \sim 1.007$$

$$x_3 = 7 + \frac{2^{20}}{2^2} x_2 = 7 + 2^{18} \cdot 1.007 = \text{enorme}$$

$$x_4 = 7 + \frac{3^{20}}{2^3} x_3 = \text{ancora} + \text{enorme} \dots$$

e infatti $x_n \rightarrow 7$.

Abbiamo che $\frac{n^{20}}{2^n} \rightarrow 0$, quindi definitivamente $\frac{n^{20}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$

Più precisamente esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n^{20}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$.

PIANO (i) $7 \leq x_n \leq x_{m_0} + 14$ per ogni $n \geq m_0$
 (ii) $x_n \rightarrow 7$

Dim. pto (i) Dal pto (i) sappiamo che

$$7 + \frac{n^{20}}{2^n} 7 \leq 7 + \frac{n^{20}}{2^n} x_n \leq 7 + \frac{n^{20}}{2^n} (x_{m_0} + 14)$$

Questo è un numero
fisso: il valore per
 $n = m_0$ più 14.

Ho quindi che $x_{n+1} \rightarrow 7$, quindi $x_n \rightarrow 7$

Dim. pto (i) La parte $x_n \geq 7$ è ovvia per induzione.

Dimostro per induzione che $x_n \leq x_{m_0} + 14$ per ogni $n \geq m_0$.

Passo base: $n = m_0$. Viene $x_{m_0} \leq x_{m_0} + 14$ ovvio

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq x_{m_0} + 14$ Tesi: $x_{n+1} \leq x_{m_0} + 14$

Dim. $x_{n+1} = 7 + \frac{n^{20}}{2^n} x_n \leq 7 + \frac{n^{20}}{2^n} (x_{m_0} + 14)$

↑
ric.

↑
uso Hp

$$\text{uso } \frac{n^{20}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \leq 7 + \frac{1}{2} (x_{m_0} + 14)$$

$$= 7 + \frac{x_{m_0}}{2} + 7$$

$$= \frac{x_{m_0}}{2} + 14$$

ovvia

$$\leq x_{m_0} + 14$$

Questo dimostra il passaggio induttivo per ogni $n \geq m_0$.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 067

Titolo nota

12/11/2011

INTEGRALI

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Come si definiscono
- ④ Come si calcolano

① Notazioni

$$\int_a^b f(x) dx$$

Si intende che:

- $[a, b]$ è la zona di integrazione, cioè l'insieme su cui si integra (intervallo limitato)
- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione che si integra (integrand)
- dx indica che si integra rispetto alla variabile x

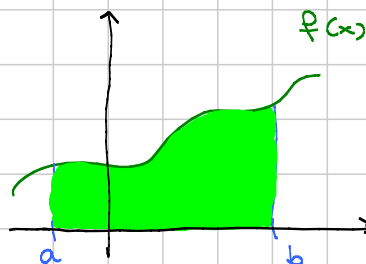
Ingredienti fondamentali:

- zona di integrazione che è un intervallo limitato
- funzione integranda $f(x)$ limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$

Se ci sono gli ingredienti fondamentali si parla di integrale **PROPRIO**, altrimenti l'integrale è **IMPROPRIO**.

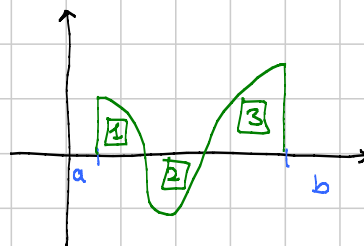
② Significato geometrico

$\int_a^b f(x) dx =$ area CON SEGNO
della parte di piano compresa
tra asse x , grafico di $f(x)$ e
rette $x = a$ e $x = b$



Area con segno: le zone con $f(x) \geq 0$ contano con il segno +, quelle con $f(x) \leq 0$ contano con il segno -.

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area } [1] - \text{Area } [2] + \text{Area } [3]$$

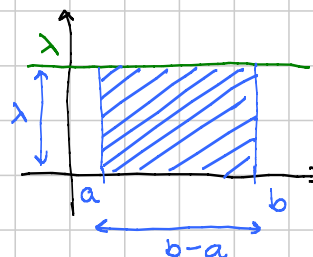


- ③ Definizione formale
- Caso banale (funzioni costanti)
 - Caso semibanal (funzioni a gradino)
 - Caso generale (funzioni generali)

Caso banale: sia $f(x) = \lambda$ per ogni $x \in [a, b]$,
dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è una costante.

In questo caso

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{area del rettangolo (con segno)} \\ &= \text{base} \cdot \text{altezza} = (b-a) \cdot \lambda \end{aligned}$$



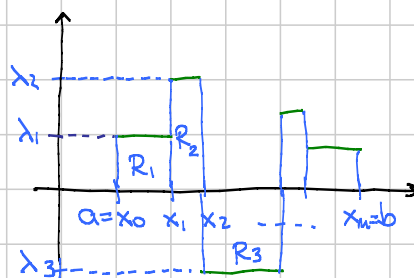
Nota bene: se $\lambda < 0$, l'integrale viene negativo.

Caso semibanal: funzioni a gradino (funzioni semplici, step functions)
si tratta di funzioni costanti a tratti.

Vuol dire che l'intervallo $[a, b]$ è suddiviso in un numero finito di sottointervalli, ed $f(x)$ è costante in ogni sottointervallo.

Quindi si è fissato

- un intero $n \geq 1$ (il numero di sottointerv.)
- punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
(gli estremi della suddivisione)
- valori reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (valori assunti da $f(x)$ nei vari sottointervalli).



In questo caso

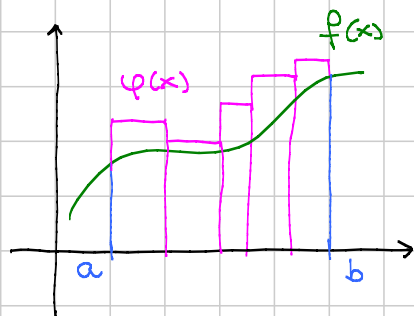
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{somma ALGEBRICA delle aree dei rettangoli} \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Area}(R_i) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base } R_i} \cdot \underbrace{\lambda_i}_{\text{altezza di } R_i \text{ con segno,}} \end{aligned}$$

Caso generale Sia ora $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione limitata.

Considero le funzioni a gradino $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\varphi(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$

Considero l'insieme costituito dagli integrali di tutte le $\varphi(x)$ così costruite.

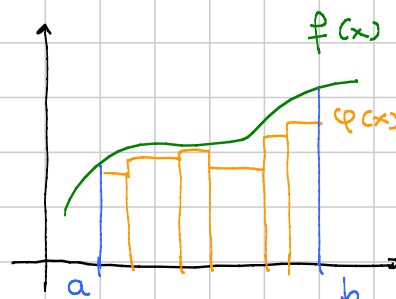
Intuitivamente, l'integrale di $f(x)$ è l'inf. di tutti questi numeri. Se voglio avvicinarmi all'inf. devo suddividere $[a, b]$ in molti pezzi e non "sprecare con le altezze".



Analogamente potrei

* considerare tutte le funzioni a gradino $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$,

* per ciascuna di esse calcolare l'integrale,
* prendere il sup di tutti i numeri ottenuti.



Definizione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Si dice integrale superiore di f in $[a, b]$ il numero

$$I^+(f; [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ è a gradino e } \varphi(x) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$

Analogamente si definisce l'integrale inferiore

$$I^-(f; [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ è a gradino e } \varphi(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$

Oss. Avendo già definito l'integrale per le sole funzioni a gradino, questo procedimento permette di definire integrale inferiore e superiore per ogni $f(x)$ limitata.

Oss. La limitatezza di $f(x)$ garantisce l'esistenza di almeno una funzione semplice $\geq f(x)$ e di una $\leq f(x)$.

Oss. Occhio a cosa vuol dire $\geq f(x)$ e $\leq f(x)$ quando $f(x)$ non è positiva



Fatto generale. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora

$$I^+(f; [a, b]) \geq I^-(f; [a, b]).$$

Questo è vero perché l'insieme degli integrali delle $\varphi(x) \geq f(x)$ a gradino sta tutto a dx rispetto all'insieme degli integrali delle $\varphi(x)$ con $\varphi(x) \leq f(x)$.

I^- I^+

Definizione Se accade che $I^+(f; [a, b]) = I^-(f; [a, b])$, allora si dice che $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$, ed il valore comune si dice integrale di f in $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Notazione: Le SOMME DI RIEMANN superiori sono tutti gli integrali di funzioni a gradino $\geq f(x)$. Analogamente per le SOMME DI RIEMANN inferiori.

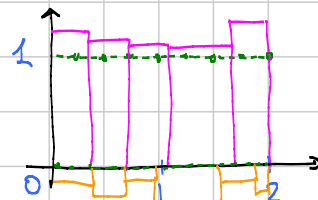
ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 068

Titolo nota

12/11/2011

Esempio Consideriamo la funzione $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

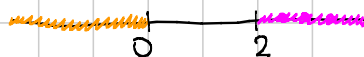


Sia ora φ una funzione a gradino con $\varphi(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$.

Deve essere $\varphi(x) \geq 1$ per ogni $x \in [0, 2]$, quindi tutte le somme di Riemann superiori sono ≥ 2 .

Analogamente, se φ è a gradino e $\varphi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$, questo vuol dire che $\varphi(x) \leq 0$. Quindi tutte le somme di R. inferiori sono ≤ 0 . Quindi

$$I^+(f; [0, 2]) = 2, \quad I^-(f; [0, 2]) = 0.$$



Teorema Sono integrabili

- tutte le funzioni monotone, anche non continue,
- tutte le funzioni continue,
- tutte le funzioni che hanno un numero finito di punti di discontinuità nei quali esistono i limiti da destra e sinistra.

Dav. per le funzioni monotone

per ogni $\varepsilon > 0$

Primo passo. Basta dimostrare che esistono una somma di R. superiore ed una inferiore che distano meno di ε . Se infatti fosse $I^+ - I^- = \alpha > 0$, allora non esisterebbe somma superiore e inferiore con distanza minore di $\frac{\alpha}{2}$.



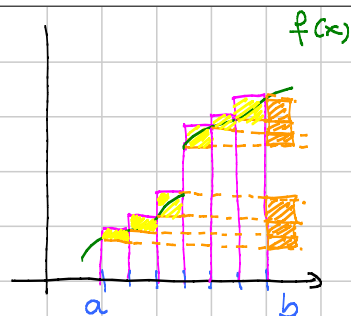
Secondo passo. Divido $[a, b]$ in n parti uguali.

Supponendo $f(x)$ monotona crescente prendo la funzione a gradino considerando il valore nell'estremo dx di ogni intervallo, e quella considerando l'estremo sx.

Chiamo $\varphi_1(x)$ quella sopra e $\varphi_2(x)$ quella sotto.

Allora

$$\int_a^b \varphi_1(x) dx - \int_a^b \varphi_2(x) dx = \text{area "avanti"}$$



Unendo tutti gli avanti viene meno di un rettangolo che ha come base $\frac{b-a}{n}$ e come altezza $f(b) - f(a)$. Quindi l'area degli avanti tende a 0 quando $n \rightarrow +\infty$.

Esempio di calcolo di integrale mediante somme di Riemann.

Voglio calcolare $\int_0^1 x^2 dx$. Noto che $f(x) = x^2$ è monotona in $[0, 1]$, quindi di sicuro integrabile.

Per scrivere una somma di R. sup. divido $[0, 1]$

in n parti uguali. In ogni tratto prendo il

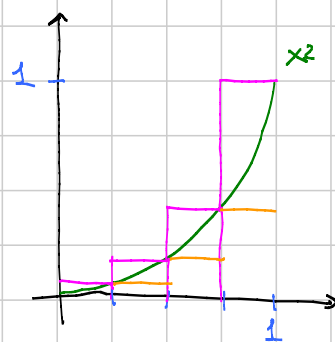
valore nell'estremo destro. Quindi il

rettangolo i -esimo ha come base l'intervallo

$[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ e come altezza $f(\frac{i}{n}) = \frac{i^2}{n^2}$,

quindi area

$$\text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2} = \frac{i^2}{n^3}$$



Quindi la corrispondente somma di R. superiore è

$$\sum_{i=1}^n \text{Area}(R_i) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(SRS)

uso formula per la somma dei quadrati (induz.)

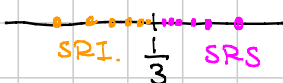
Analogamente considerando l'estremo sinistro abbiamo che l' i -esimo rettangolo ha base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ e altezza $f(\frac{i-1}{n}) = \frac{(i-1)^2}{n^2}$. La corrispondente somma è

$$\sum_{i=1}^n \text{Area}(R_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{(i-1)^2}{n^2}}_{\text{altezza}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{base}} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

(SRI)

precedente con $n-1$ al posto di n

Cosa succede quando $n \rightarrow +\infty$? Sia la somma superiore che quella inferiore tendono ad $\frac{1}{3}$, che quindi è il valore dell'integrale.



Proprietà degli integrali

- ① $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- ② $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- ③ Se $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
In particolare, se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

$$\textcircled{4} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Nell'esempio è come dire che

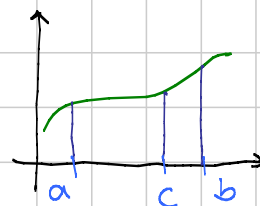


$$|\text{Area } \textcircled{1} - \text{Area } \textcircled{2} + \text{Area } \textcircled{3}| \leq \text{Area } \textcircled{1} + \text{Area } \textcircled{2} + \text{Area } \textcircled{3}$$

quindi è una proprietà dei valori assoluti

- ⑤ Se $c \in (a, b)$, allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

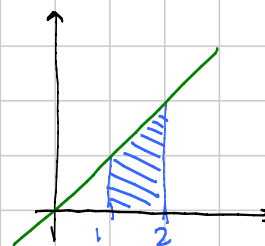


Esempio 1

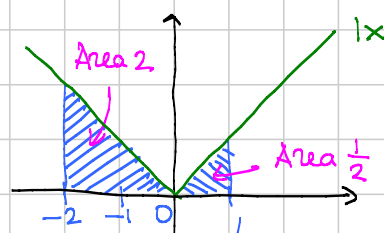
$$\int_1^2 x \, dx = \text{area trapezio}$$

$$= (1+2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

↑
formula per area
trapezio

Esempio 2

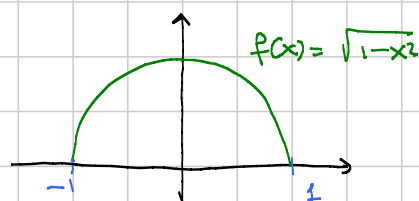
$$\int_{-2}^1 |x| \, dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Esempio 3

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx =$$

= area semicerchio

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi}{2}$$



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 069

Titolo nota

12/11/2011

Integrali: come si calcolano? No di certo mediante le somme di Riemann inferiori e superiori.

Def. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisce PRIMITIVA di f una qualunque funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che F è derivabile e

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Operativamente * Voglio calcolare $\int_a^b f(x) dx$, con f continua

* Determino una qualunque primitiva F di f

$$\begin{aligned} * \text{ Allora } \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \\ &= [F(x)]_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

Esempio Voglio calcolare $\int_0^1 x^2 dx$. Allora cerco una funzione $F(x)$

tale che $F'(x) = x^2$ per ogni $x \in [0, 1]$. È facile vedere che $F(x) = \frac{1}{3} x^3$ (basta fare la verifica che $F'(x) = x^2 \dots$).

Allora

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

— 0 — 0 —

C'è da dimostrare che

- * primitive diverse danno comunque lo stesso risultato
- * il risultato di $[F(x)]_a^b$ è proprio l'integrale.

Primitive diverse, risultato uguale

Siano $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ due primitive della stessa $f(x)$. Allora

$$[F_1(x)]_a^b = [F_2(x)]_a^b$$

Dim. Pongo $G(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Allora

$$G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Quindi $G'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Ma allora $G(x) = \text{costante}$ perché

$$G(x) - G(a) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{G'(\xi)} \cdot (x-a) = 0$$

cioè $G(x) = G(a)$ per ogni $x \in [a, b]$.

[Achtung! Il fatto che la derivata di una costante è 0, non escluderebbe da solo l'esistenza di funzioni strane con derivata nulla...]

Una volta che $G(x) = \text{costante } \lambda$ abbiamo che $F_2(x) - F_1(x) = \lambda$, cioè $F_2(x) = F_1(x) + \lambda$ per ogni $x \in [a, b]$. Ma allora

$$[F_2(x)]_a^b = F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + \lambda) - (F_1(a) + \lambda)$$

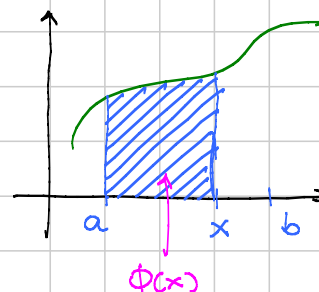
$$= \underset{\text{---}}{F_1(b)} - \underset{\text{---}}{F_1(a)} = [F_1(x)]_a^b$$

Funzione integrale

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice funzione integrale la funzione

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$\uparrow$
 variabile di integrazione
 che può avere un
 nome qualunque, ma
 diverso dagli estremi



Achtung! Non ha senso scrivere $\int_a^x f(x) dx$ come non ha senso

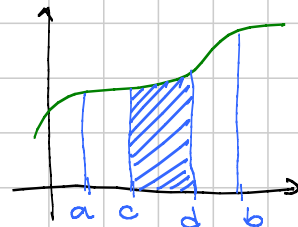
scrivere $\sum_{n=1}^n n^2$ (si scrive invece $\sum_{k=1}^n k^2$)

Proprietà basilari della funzione integrale

1-
$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = [\Phi(x)]_a^b$$

2- Se $[c, d] \subseteq [a, b]$, allora

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \Phi(d) - \Phi(c) \\ &\quad \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{integrale} & \text{integrale} \\ \text{tra } a \text{ e } d & \text{tra } a \text{ e } c \end{array} \\ &= [\Phi(x)]_c^d \end{aligned}$$



Proprietà meno basilare: $\Phi(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Se dimostro la proprietà meno basilare ho giustificato il metodo di calcolo perché esiste una primitiva di $f(x)$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = [\text{primitiva}]_a^b$$

e se è vero per una primitiva, allora è vero per tutte.

Teorema della media integrale Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

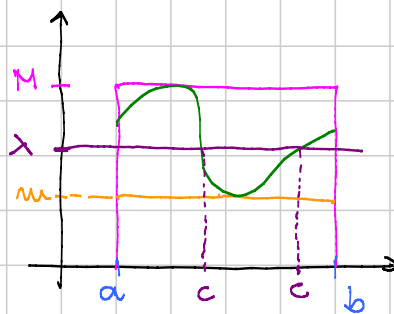
Allora esiste almeno un pto $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Dim. Considero $M = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}$
 $m = \min \{f(x) : x \in [a, b]\}$

Esistono per Weierstrass. Inoltre

$$\underbrace{m(b-a)}_{\text{area rettangolo piccolo}} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{M(b-a)}_{\text{area rettangolo grande}}$$



Quindi

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_\lambda \leq M$$

Quindi λ è un numero compreso tra il minimo m ed il massimo M .
Per il teorema di esistenza dei valori intermedi, esiste almeno un p.to $c \in [a, b]$ (o anche più di 1) tale che $f(c) = \lambda$, che è proprio la tesi.

— o — o —

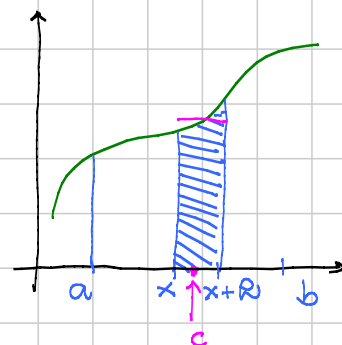
Oss. Si chiama teorema della media integrale perché il rettangolo di base $[a, b]$ e altezza $f(c) = \lambda$ ha area uguale al valore dell'integrale.

— o — o —

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $\Phi(x)$ la funzione integrale.
Allora $\Phi'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, cioè $\Phi(x)$ è una primitiva di f .

Dim. Calcolo il rapporto incrementale (per semplicità prendo $h > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$



$$(\text{teo. media int.}) = \frac{1}{h} \cdot \boxed{h} \cdot \boxed{f(c)} = f(c)$$

↑ ampiezza
intervallo
 ↑ valore in un
p.to intermedio

Ovviamente c dipende da x e da h , ma in ogni caso $x \leq c \leq x+h$.
Quando $h \rightarrow 0$, ho che $c \rightarrow x$ per i carabinieri, quindi $f(c) \rightarrow f(x)$.
In conclusione

$$\Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x), \text{ che è la tesi. } \square$$

— o — o —

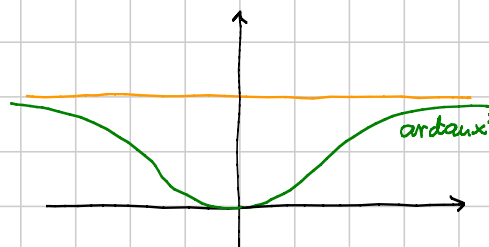
ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 070

Titolo nota

16/11/2011

Esercizio 1 Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$

Sovrapporre i grafici è pericoloso!

Studio la funzione $f(x) = x - \arctan(x^2)$ (la disequazione sarà poi $f(x) \geq 0$)

1 - Nessuna simmetria

2 - $f(x)$ è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ 3 - Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ [Nota bene: queste informazioni da sole garantiscono che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva]

4 - Zeri e segno: non lo sappiamo fare ... per ora.

5 - Studio di $f'(x)$. Intanto esiste in tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

Ora dovrai studiare $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$. Poiché denominatore > 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, basta studiare zeri e segno di $x^4 - 2x + 1$.Poiché si annulla per $x = 1$, possiamo dividere per $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & -2x+1 \\ -x^4+x^3 & \\ \hline & x^3-2x+1 \\ & -x^3+x^2 \\ \hline & x^2-2x+1 \\ & -x^2+x \\ \hline & -x+1 \\ & x-1 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \text{Dalla divisione deduco che}$$

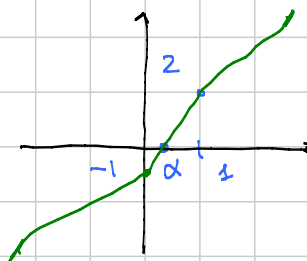
$$x^4 - 2x + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$$

Il segno del 1° fattore si studia bene, il 2° fattore NO.

Oss. Il 2° fattore si annulla di sicuro perché tende a $\pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Per il 2° fattore, pongo $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ e studio $g(x)$.
Tende a $\pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Inoltre $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Ora il discriminante è < 0 , quindi $g'(x) > 0$ sempre, quindi $g(x)$ è monotona crescente.

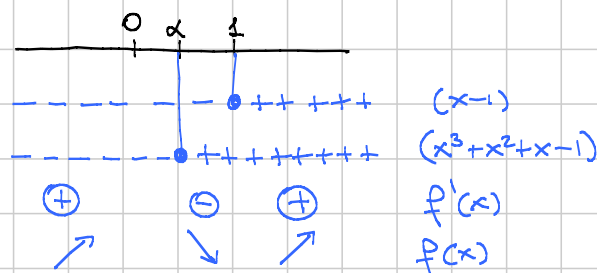
Per la monotonia abbiamo che $g(x)$ si annulla una volta sola, e lo fa in un pto $\alpha \in (0, 1)$ perché $g(0) = -1$ e $g(1) = 2$.



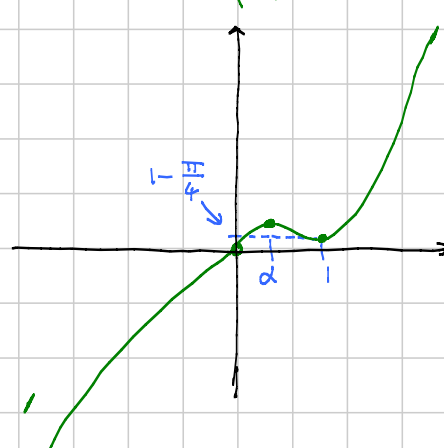
Riassumendo, il segno di $g(x)$ è così



Torniamo a $x^4 - 2x + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$



$$f(x) = x - \arctan(x^2)$$



Osserviamo che $f(0) = 0$

$f(x)$ cresce fino in $x = \alpha$ (quindi $f(x) > 0$)

poi decresce da α fino ad 1.

Calcolo $f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$

Da $x=1$ in poi cresce,

Ora siamo in grado di dire che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$, e vale il segno di uguale se e solo se $x = 0$.

— 0 — 0 —

Seconda soluzione dell'esercizio: devo risolvere $\arctan(x^2) \leq x$

- Per $x < 0$ ho che è falsa in quanto $x < 0$ e $\arctan(x^2) > 0$
- Per $x = 0$ vale il segno di uguale
- per $x \in (0, 1)$ abbiamo che $\arctan(x^2) < x^2 < x$

$\uparrow$ disug. classica
 $\leftarrow$ vera in $(0, 1)$
- per $x \geq 1$ si studia la funzione e si vede che è più semplice lo studio del segno di $f'(x)$.

Esercizio 2 Studiare $x_{n+1} = \cos x_n$ $x_0 = 2011$

È equivalente a scrivere 2011 su una calcolatrice, e poi continuare a schiacciare $\cos$: ogni termine è il coseno del precedente.

Dopo un po' si stabilizza su un valore, segue evidente che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Idea: $x_n \rightarrow l$ spiraleggiando.

Proviamo un piano con la distanza:

sia l la soluzione dell'equazione

$$\cos x = x.$$

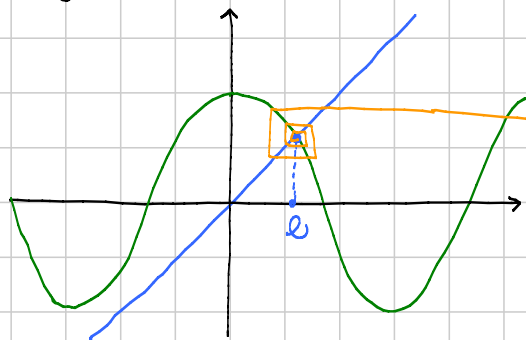
Poniamo $d_n = |x_n - l|$. Allora

(i) $-1 \leq x_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$.

(ii) $d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $x_n \rightarrow l$.



Intanto: perché l'equazione $\cos x = x$ ha soluzione? Perché la soluzione è unica? Basta studiare la funzione $g(x) = x - \cos x$ che risulta surgettiva (limiti...) e iniettiva (in quanto strettamente crescente per Monotonia 3: verificare!).

Dim (i) Banale induzione

$$\begin{array}{l} \text{Def. } d_n \quad \text{ricor. + } l = \cos l \quad \text{Lagrange} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Dim (ii)} \quad d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |\cos x_n - \cos l| = \underbrace{|x_n - l|}_{d_n} \cdot \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1} \end{array}$$

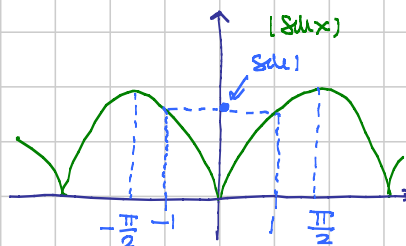
In questo modo avrei dimostrato che $d_{n+1} \leq d_n$, e questo non serve a nulla, MA

$$d_{n+1} = \underbrace{|x_n - l|}_{d_n} \cdot |\sin \xi| \quad \text{Ora abbiamo che } \xi \in [-1, 1], \text{ quindi}$$

$$|\sin \xi| \leq \max \{ |\sin x| : x \in [-1, 1] \} = \sin 1 < 1$$

Quindi in realtà $|\sin \xi| \leq \sin 1$, cioè

$$d_{n+1} \leq \underbrace{(\sin 1)}_{c < 1} \cdot d_n$$



Dim (iii) e (iv) Solita roba (con (ii)) $d_n \leq (\sin 1)^n d_1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 071

Titolo nota

16/11/2011

Calcolo operativo di integrali Per calcolare $\int_a^b f(x) dx$
cerco una funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

cioè una primitiva, quindi calcolo

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Questo motiva la ricerca di tecniche per determinare le primitive.

Primitive elementari: leggere la tabellina delle derivate al contrario.

Notazione $\int f(x) dx$ = una primitiva qualunque di $f(x)$
integrale senza costanti

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, \quad \int 1 dx = x$$

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \quad \text{per } k \in \mathbb{N}, \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{per } \alpha \neq -1$$

Oss. In realtà $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$. Se scrivo $\int \frac{1}{x} dx = \log x$
dico una cosa vera, cioè la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$.

Tuttavia $\frac{1}{x}$ è definita per ogni $x \neq 0$, quindi ha senso cercare
una funzione $F(x)$, definita per ogni $x \neq 0$, e tale che
 $F'(x) = \frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$.

È ovvio che $F(x) = \log x$ va bene per $x > 0$, mentre per $x < 0$ va
bene $\log(-x) = F(x)$: infatti $F'(x) = [\log(-x)]' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$.

Il famigerato $+c$ Prendiamo $f(x) = 3x^2$. Una sua primitiva è $F(x) = x^3$.

Chi sono tutte le primitive di $f(x) = 3x^2$?

Sono tutte le funzioni del tipo $F(x) = x^3 + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Motivo: la differenza tra 2 primitive ha derivata nulla, quindi su tutto $\mathbb{R}$ è costante (vedi Lagrange...).

Dunque in questo caso $x^3 + c$ rappresenta l'insieme di tutte le primitive.

Prendiamo ora $f(x) = \frac{1}{x}$. Una sua primitiva è $F(x) = \log|x|$.

Chi sono tutte le primitive di $f(x) = \frac{1}{x}$?

Tutte le funzioni del tipo $F(x) = \log|x| + c$? NO!!!!

Sono tutte le funzioni del tipo

$$F(x) = \begin{cases} \log x + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \log(-x) + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Posso usare c_1 e c_2 diversi sui positivi e sui negativi! Il motivo è che l'insieme di definizione è fatto da 2 pezzi, quindi posso usare c diversi sui due pezzi (avere derivata nulla vuol dire essere costanti separatamente sui 2 pezzi).

Riassumendo:

- mettere $+c$ non serve a nulla per il calcolo esplicito di un integrale con estremi
- mettere $+c$ può non bastare per descrivere l'insieme di tutte le primitive.

Esempio 1

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2}$$

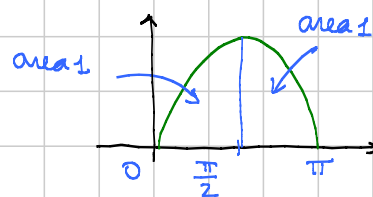
$$= -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$$

$$= 0 + 1 = 1$$



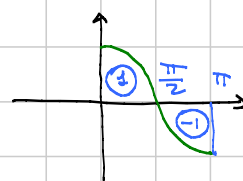
Esempio 2 $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos \frac{\pi}{2})$
 $= 1 - 0 = 1$

Si poteva dedurre dal precedente per ragioni di simmetria



Esempio 3 $\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x \, dx = -1$ (dedotto dai precedenti per ragioni di simmetria o in alternativa facendo il conto).

Esempio 4 $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$



Esempio 5 $\int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^3 x^{-2} \, dx = \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right]_1^3 = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3$
 $= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

x^a con $a = -2$

Controllo della primitiva: $\left[-\frac{1}{x} \right]' = \frac{1}{x^2}$ ok.

Esempio 6 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} \, dx = \int_{-1}^2 x^{-3} \, dx = \left[\frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \right]_{-1}^2 = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^2$

Verifica della primitiva: $\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]' = -\frac{1}{2} \cdot (-2) x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ ok.

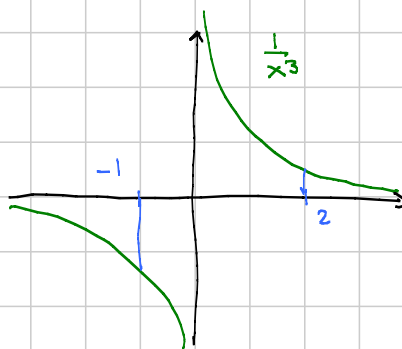
Conclusione: $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} \, dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

ASSOLUTAMENTE NO!!!

Gli ingredienti fondamentali

degli integrali PROPRII sono

- zona di integrazione limitata
- integranda limitata



Sotto un integrale c'è sottinteso lo studio della limitatezza...

Esempio 7 $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Esempio 8 $\int 2^x dx = \int e^{x \log 2} dx = \frac{1}{\log 2} e^{x \log 2} = \frac{1}{\log 2} \cdot 2^x$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} \cdot a^x$$

Esempio 9 $\int \sin(5x) dx = -\frac{1}{5} \cos(5x)$

Esempio 10 $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

$$\int \sqrt{x+5} dx = \frac{2}{3} (x+5) \sqrt{x+5}$$

$$\int \sqrt{2x+5} dx = \frac{2}{3} (2x+5) \sqrt{2x+5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} (2x+5) \sqrt{2x+5}$$

Verifica della primitiva:

$$\left[\frac{1}{3} (2x+5) \sqrt{2x+5} \right]' = \left[\frac{1}{3} (2x+5)^{\frac{3}{2}} \right]'$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (2x+5)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = \sqrt{2x+5} \quad \text{Ok,}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 072

Titolo nota

17/11/2011

INTEGRAZIONE PER PARTI

Idea di partenza: una primitiva di una derivata è la funzione stessa

$$\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Scegliamo $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$. Allora $\Phi'(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) G'(x)$

Ponendo $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) G(x) + F(x) g(x)\} dx &= [F(x) G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) G(x) dx + \int_a^b F(x) g(x) dx \end{aligned}$$

Portando uno degli integrali al 2° membro otteniamo

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = [F(x) G(x)]_a^b - \int_a^b f(x) G(x) dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI "UFFICIALE"

$$\int F g = F G - \int f G \quad \text{Formula di integrazione per parti "abusiva"}$$

Operativamente si tratta di scrivere l'integranda come prodotto di una F per una g : nel seguito bisognerà derivare F e integrare g .

È quindi utile scegliere una F che "derivando migliori" ed una g di cui si sappia fare la primitiva.

Esempio 1 $\int \underset{F}{x} \underset{g}{e^{3x}} dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3}e^{3x}} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3}e^{3x}} dx$

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$$

Verifica della primitiva: $\left[\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right]' = \cancel{\frac{1}{3} e^{3x}} + \cancel{\frac{1}{3} x \cdot 3 e^{3x}} - \cancel{\frac{1}{3} e^{3x}} = x e^{3x}$

Esempio 2 $\int \underset{F}{x} \underset{g}{\cos(2x)} dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} \sin(2x)} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} \sin(2x)} dx$

$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) \quad \text{VERIFICA...}$$

Esempio 3 $\int \underset{F}{x^2} \underset{g}{\sin(3x)} dx = \underset{F}{x^2} \left(\underset{G}{-\frac{1}{3} \cos(3x)} \right) - \int \underset{f}{2x} \left(\underset{G}{-\frac{1}{3} \cos(3x)} \right) dx$

$$= -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{3} \int x \cos(3x) dx$$

Calcolo a parte $\int \underset{F}{x} \underset{g}{\cos(3x)} dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3} \sin(3x)} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3} \sin(3x)} dx$

$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) - \frac{1}{3} \int \sin(3x) dx = \frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x)$$

Mettendo insieme i pezzi otteniamo che

$$\int x^2 \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) + \frac{2}{27} \cos(3x)$$

Verifica: $\left[-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) + \frac{2}{27} \cos(3x) \right]' = \cancel{-\frac{2}{3} x \cos(3x)} + \cancel{x^2 \sin(3x)} + \cancel{\frac{2}{9} \sin(3x)} + \cancel{\frac{2}{3} x \cos(3x)} - \cancel{\frac{2}{9} \sin(3x)} = x^2 \sin(3x)$

Con lo stesso metodo si calcolano primitive del tipo ($p(x)$ = polinomio)

$$\int p(x) e^{ax} dx$$

$$\int p(x) \cos(ax) dx$$

$$\int p(x) \sin(ax) dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{Esempio 4} \quad \int (x+3) \cdot 5^x dx &= \int \underbrace{(x+3)}_F \cdot \underbrace{e^{\log 5 \cdot x}}_G dx = \\
 &= \underbrace{(x+3)}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{\log 5} \cdot e^{\log 5 \cdot x}}_G - \int \underbrace{1}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{\log 5} \cdot e^{\log 5 \cdot x}}_G dx \\
 &= \underbrace{(x+3)}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{\log 5}}_f \cdot \underbrace{5^x}_G - \underbrace{\frac{1}{\log 5}}_f \int \underbrace{e^{\log 5 \cdot x}}_G dx = \underbrace{\frac{1}{\log 5}}_f \underbrace{(x+3)}_F \cdot \underbrace{5^x}_G - \underbrace{\frac{1}{\log^2 5}}_f \cdot \underbrace{5^x}_G
 \end{aligned}$$

GRANDE RITORNO

$$\begin{aligned}
 \text{Esempio 5} \quad \int \cos^2 x dx &= \int \underbrace{\cos x}_F \cdot \underbrace{\cos x}_G dx = \underbrace{\cos x}_F \cdot \underbrace{\sin x}_G - \int \underbrace{(-\sin x)}_f \cdot \underbrace{\sin x}_G dx \\
 &= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x dx
 \end{aligned}$$

1ª idea: $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x = F \cdot g$, ma così torno da capo (provare!)

2ª idea: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (precorso!). Otteniamo che

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x dx &= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx \\
 &= \cos x \cdot \sin x + x - \underbrace{\int \cos^2 x dx}_{\text{grande ritorno!}}
 \end{aligned}$$

$$2 \int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + x \Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$$

$$\text{Esempio 6} \quad \int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_F \cdot \underbrace{\sin x}_G dx = \underbrace{\sin x}_F \cdot \underbrace{(-\cos x)}_G - \int \underbrace{\cos x}_f \cdot \underbrace{(-\cos x)}_G dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \underbrace{\int \sin^2 x dx}_{\text{grande ritorno}} \\
 &\quad \quad \quad = 1 - \sin^2 x
 \end{aligned}$$

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x \Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$$

Oss. $\int \cos^2 x \, dx + \int \sin^2 x \, dx = x$, il che non stupisce perché $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Modo alternativo per integrare $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$

Precorso: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Da queste si ottiene:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Quindi

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) = \text{volendo...}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x$$

Idem per $\sin^2 x$

Esempio 7 $\int \cos^3 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_g \cdot \underbrace{\cos^2 x}_F \, dx = \underbrace{\sin x}_g \cdot \underbrace{\cos^2 x}_F + \int \underbrace{\sin x}_g \cdot \underbrace{2 \cos x \cdot (-\sin x)}_f \, dx$

$$= \sin x \cos^2 x + 2 \int \underbrace{\cos x \cdot \sin^2 x}_{1 - \cos^2 x} \, dx$$

$$= \sin x \cos^2 x + 2 \int \cos x - \cos^3 x \, dx$$

$$= \sin x \cos^2 x + 2 \int \cos x - \underbrace{2 \int \cos^3 x \, dx}_{\text{grande ritorno}}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 073

Titolo nota

17/11/2011

Integrazione per parti + percorso + grande ritorno $\Rightarrow$ primitive del tipo

$$\int \cos^k x \, dx$$

$$\int \sin^k x \, dx$$

Ad ogni passaggio
l'esponente scende di 2.

Esempio 1 $\int \sin^4 x \, dx = \int \sin^3 x \cdot \sin x \, dx$

F g

$$= \sin^3 x \cdot (-\cos x) - \int 3\sin^2 x \cdot \cos x (-\cos x) \, dx$$

F G f g

$$= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \, dx - 3 \int \sin^4 x \, dx$$

1 - sin²x grande rit.

$$4 \int \sin^4 x \, dx = -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \, dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \sin x \cos x$$

fatto prima per parti

Metodo alternativo per la primitiva di $\sin^4 x$: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, quindi

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \int \left\{ \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x) \right\}$$

controllare che
coincida con quella
prima!

$$\int \cos^2(x) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x \Rightarrow \int \cos^2(2x) \, dx = \left[\frac{2x}{2} + \frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) \right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x)$$

Esempio 2 $\int \underbrace{\cos(2x)}_F \cdot \underbrace{e^{3x}}_G dx = \underbrace{\cos(2x)}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{3}e^{3x}}_G - \int \underbrace{(-2\sin(2x))}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{3}e^{3x}}_G dx$

$$= \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{3} \int \sin(2x) \cdot e^{3x} dx$$

$\begin{matrix} F & G \\ g & F \end{matrix} \rightsquigarrow$ si torna indietro: provare!

$$= \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{3} \left\{ \underbrace{\sin(2x)}_F \underbrace{\frac{1}{3}e^{3x}}_G - \int \underbrace{2\cos(2x)}_F \underbrace{\frac{1}{3}e^{3x}}_G dx \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} \sin(2x) e^{3x} - \underbrace{\frac{4}{9} \int \cos(2x) \cdot e^{3x} dx}_{\text{grande ritorno}}$$

Portando a sinistra ottengo

$$\frac{13}{9} \int \cos(2x) \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} \sin(2x) \cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow \int \cos(2x) \cdot e^{3x} dx = \left(\frac{3}{13} \cos(2x) + \frac{2}{13} \sin(2x) \right) \cdot e^{3x} \quad \text{verifica !!!}$$

Allo stesso modo (grande ritorno dopo 2 passaggi per parti) si fanno tutte le primitive del tipo

$$\int \sin(ax) e^{bx} dx,$$

$$\int \cos(ax) e^{bx} dx,$$

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) \cdot e^{cx} dx$$

Obs. Usando le formule trigonometriche PRODUCT TO SUM è possibile trasformare i prodotti $\sin(ax) \cdot \cos(bx)$ in somme di funzioni trigonometriche, che poi si integrano. lo stesso trucco permette di fare primitive del tipo

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$$

$$\int p(x) \cdot \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$$

prima product $\rightarrow$ sum e poi integrazione per parti.

TRUCCO DELL'1 NASCOSTO

$$\begin{aligned} \text{Esempio 3} \quad \int \log x \, dx &= \int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\log x} = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x = x(\log x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Verifica: } [x \log x - x]' = \log x + \cancel{x \cdot \frac{1}{x}} - \cancel{1} = \log x$$

$$\text{Esempio 4} \quad \int \log(5x) \, dx = \underbrace{5x}_{\text{quello di prima}} (\log(5x) - 1) \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\substack{\text{compensa la} \\ \text{derivata di } 5x}} = x(\log(5x) - 1)$$

$$\text{Verifica: } [x \log(5x) - x]' = \log(5x) + \cancel{x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5} - \cancel{1} = \log(5x)$$

Oss. $[\log(5x)]' = \frac{1}{x}$ e non stupisce perché $\log(5x) = \log 5 + \log x$

$$\text{Esempio 5} \quad \int \arctan x \, dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\arctan x} \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\arctan x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \\ &= x \arctan x - \log \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si fanno le primitive del tipo

$$\int p(x) \cdot \log x \, dx$$

$$\int p(x) \cdot \arctan x \, dx$$

Il polinomio $p(x)$ si integra, $\log x$ o $\arctan x$ si derivano.

Esempio 6 $\int \underset{g}{x} \cdot \underset{F}{\log^2 x} dx = \int \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \underset{F}{\log^2 x} - \int \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{f}{2 \log x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \int \underset{g}{x} \underset{F}{\log x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \left\{ \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \underset{F}{\log x} - \int \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{1}{4} x^2 \quad \text{Verifica!}$$

Allo stesso modo $\boxed{\int p(x) \cdot \log^k x dx}$ Il log si deriva!

Esempio 7 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \underset{g}{\sin x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{\cos x}} dx =$

$$= \underset{G}{- \cos x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{G}{(- \cos x)} \cdot \underset{f}{\left(- \frac{1}{\cos^2 x}\right)} \underset{f}{(- \sin x)} dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -1 + \int \tan x dx$$

Ho ottenuto che $\int \tan x dx = -1 + \int \tan x dx$ ☹️

Ho applicato correttamente la formula "abusiva" !!!

Esempio analogo: $\int 1 dx = \int \underset{F}{e^x} \cdot \underset{g}{e^{-x}} dx = \text{provare che succede !!!}$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 074

Titolo nota

18/11/2011

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Punto di partenza: $\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Uso la formula con $\Phi(x) = F(G(x))$. Allora, ponendo come sempre $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$, avremo che

$$\Phi'(x) = F'(G(x)) G'(x) = f(G(x)) g(x)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(G(x)) g(x) dx &= F(G(b)) - F(G(a)) = [F(x)]_{G(a)}^{G(b)} \\ &= \int_{G(a)}^{G(b)} F'(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

Formula di integrazione per sostituzione

Interpretazione brutale: devo calcolare

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx \quad \text{Pongo } y = G(x)$$

Ora x varia tra a e b . Quando $x=a$ ho che $y=G(a)$. Quando $x=b$ ho che $y=G(b)$. Con la sostituzione $f(G(x))$ diventa $f(y)$. Come sono legati dx e dy ?

$$\frac{dy}{dx} = \text{derivata di } y \text{ rispetto ad } x = G'(x) = g(x)$$

Ritornando dx a destra abbiamo che $dy = g(x) dx$, quindi

$$\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

Esempio 1 $\int x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx$

Pongo $x^2 = y$, quindi $\frac{dy}{dx} = 2x$, da cui $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin(x^2)}_{\sin y} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \sin y dy = -\frac{1}{2} \cos y = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$$

$\uparrow$
torso in x

Verifica: $[-\frac{1}{2} \cos(x^2)]' = -\frac{1}{2} (-\sin(x^2)) \cdot 2x = x \sin(x^2)$

Esempio 2 $\int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{-x^3} dx$

Pongo $y = x^3$, quindi $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, quindi $dy = 3x^2 dx$

$$= \frac{1}{3} \int \underbrace{e^{-x^3}}_{e^{-y}} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{dy} = \frac{1}{3} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{3} e^{-y} = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

$\uparrow$
 $y = x^3$

Esempio 3 $\int \cos x \cdot 7^{\sin x} dx =$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, quindi $dy = \cos x \cdot dx$

$$= \int \underbrace{7^{\sin x}}_{7^y} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dy} = \int 7^y dy = \frac{1}{\log 7} \cdot 7^y = \frac{1}{\log 7} \cdot 7^{\sin x}$$

Esempio 4 $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

Pongo $y = 1+x^2$, da cui $\frac{dy}{dx} = 2x$, quindi $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log |y| = \frac{1}{2} \log |1+x^2|$$

$$= \frac{1}{2} \log (1+x^2) = \log \sqrt{1+x^2}$$

Esempio 5 $\int \frac{1}{x \log^2 x} dx =$

Pongo $y = \log x$, da cui $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, quindi $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{\log^2 x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\log x}$$

Esempio 6 $\int \frac{\log^7 x}{x} dx$ $y = \log x, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \log^7 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int y^7 dy = \frac{1}{8} y^8 = \frac{1}{8} \log^8 x$$

Esempio 7 $\int \frac{1}{x \log x} dx$ $y = \log x, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \underbrace{\frac{1}{\log x}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log |\log x|$$

Esempio 8 $\int \log^3 x dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log^3 x} dx \stackrel{\text{per parti}}{=} \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log^3 x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{3 \log^2 x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{x}} dx$

$$= x \log^3 x - 3 \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log^2 x} dx = x \log^3 x - 3 \left\{ \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log^2 x} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{2 \log x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{x}} dx \right\}$$

$$= x \log^3 x - 3 x \log^2 x + 6 \int \log x dx = x \log^3 x - 3 x \log^2 x + 6 x \log x - 6 x$$

Esempio 9 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Pongo $y = \cos x$, da cui $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, quindi $dy = -\sin x dx$

$$= - \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{y}} \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int \frac{1}{y} dy = -\log |y| = -\log |\cos x|$$

$$= \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Esempio 10 $\int \cos^5 x \, dx$

1° metodo: per parti scrivendo $\cos^5 x = \cos x \cdot \cos^4 x$ e poi percorso +

g F

grande ritorno: ad ogni passaggio l'esponente scende di 2.

2° metodo: per sostituzione

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \, dx$$

$\uparrow$
 ho usato
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Pongo $y = \sin x$, da cui $\frac{dy}{dx} = \cos x$, da cui $dy = \cos x \cdot dx$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx = \int (1 - y^2)^2 \, dy = \int (1 - 2y^2 + y^4) \, dy =$$

$$= y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$$

Confrontare i risultati ottenuti per parti e per sostituzione.

Con la stessa tecnica si fanno tutte le primitive del tipo

$$\int \sin^k x \, dx$$

$$\int \cos^k x \, dx$$

con k dispari

(metodo alternativo all'integrazione per parti)

Oss. La tecnica funziona anche con k negativo, purché dispari.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 075

Titolo nota

18/11/2011

Esempio 1 $\int \log(x^2-1) dx$ 1° metodo: trucco dell'1 nascosto

$$\int \log(x^2-1) dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\log(x^2-1)} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log(x^2-1)} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x^2-1}} \cdot 2x dx$$

$$= x \log(x^2-1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2-1} dx$$

↑ funzione razionale (polinomio: polinomio)
e per queste c'è un metodo che vedremo.

2° metodo $\int \log(x^2-1) dx = \int \log[(x+1)(x-1)] dx$

$$= \int \log(x+1) dx + \int \log(x-1) dx \quad \text{entrambi si fanno per sostituzione}$$

$$\int \log(x+1) dx \quad \text{Pongo } y = x+1, \text{ da cui } \frac{dy}{dx} = 1, \text{ quindi } dy = dx$$

$$= \int \log y dy = y \log y - y = (x+1) \log(x+1) - (x+1)$$

$$\text{Analogamente } \int \log(x-1) dx = (x-1) \log(x-1) - (x-1).$$

Mettendo insieme:

$$\int \log(x^2-1) dx = (x+1) \log(x+1) - (x+1) + (x-1) \log(x-1) - (x-1)$$

= si possono fare varie semplificazioni o raccoglimenti!

Esempio 2 $\int \log(x^2+1) dx$ non funziona la scomposizione, ma resta solo l'1 nascosto

$$\int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\log(x^2+1)} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\log(x^2+1)} - \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x^2+1}} \cdot 2x dx$$

$$= x \cdot \log(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x \cdot \log(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= x \cdot \log(x^2+1) - 2 \int \left\{ 1 - \frac{1}{x^2+1} \right\} dx = x \cdot \log(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctan} x$$

Esempio 3 $\int \frac{x}{x^4+1} dx$ $\int \frac{x^2}{x^4+1} dx$ $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \log(x^4+1) = \log \sqrt[4]{x^4+1}$$

↑
volendo $y = x^4+1$

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4+1} dx$$

Pongo $y = x^2$, da cui $\frac{dy}{dx} = 2x$, $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{1+y^2}}{\frac{1}{1+y^2}} \cdot \frac{2x dx}{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \operatorname{arctan} y = \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(x^2)$$

$$\int \frac{x^2}{x^4+1} dx = \text{molto delicato.}$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{2+x^2} dx = \int \frac{1}{2(1+\frac{x^2}{2})} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} dx$

Pongo $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, da cui $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, da cui $dy = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan} y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Allo stesso modo si dimostra che $\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctan} \frac{x}{\sqrt{a}}$ Vera $\forall a > 0$

Esempio 5 $\int \frac{3x+2}{x^2+1} dx = \int \frac{3x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 2 \operatorname{arctan} x$$

Esempio 6 $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2} dx$ La derivata del denominatore è $2x+2$, quindi x e termine noto hanno lo stesso coefficiente

$$= \int \frac{3x+3-1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$$

Esempio 7 $\int \sqrt{1-x^2} dx$ Pongo $x = \sin y$, quindi $\frac{dx}{dy} = \cos y$, quindi $dx = \cos y dy$

$$= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\cos y dy}_{dx} = \int \cos^2 y dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \cos y \sin y$$

fatto per parti
o con $\cos(2y)$

Ora devo tornare in x : $y \leadsto \arcsin x$, $\sin y \leadsto x$
 $\cos y \leadsto \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$$\text{Quindi} \quad \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \cos y \cdot \sin y = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} = \int \sqrt{1-x^2} dx$$

Oss. Abbiamo usato allegramente formule del tipo $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$, senza alcuna cautela sui segni

$$\text{Verifica: } \left[\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right]' = \dots$$

Esempio 8 $\int \cos(\log x) dx$ Pongo $y = \log x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \underbrace{x}_{e^y} \cdot \underbrace{\cos(\log x)}_{\cos y} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int e^y \cdot \cos y dy$$

$$\int \underset{F}{e^y} \underset{g}{\cos y} dy = \underset{F}{e^y} \underset{G}{\sin y} - \int \underset{F}{e^y} \underset{G}{\sin y} dy$$

$$= e^y \sin y - \int \underset{F}{e^y} \underset{g}{\sin y} dy = e^y \sin y - \left\{ \underset{F}{e^y} \underset{G}{(-\cos y)} - \int \underset{F}{e^y} \underset{G}{(-\cos y)} dy \right\}$$

$$= e^y \sin y + e^y \cos y - \underbrace{\int e^y \cos y dy}_{\text{grande ritorno}}$$

$$2 \int e^y \cos y dy = e^y \sin y + e^y \cos y.$$

Tornando all' integrale iniziale:

$$\int \cos(\log x) dx = \int e^y \cos y dy = \frac{1}{2} e^y \sin y + \frac{1}{2} e^y \cos y$$

$$\boxed{y = \log x} = \frac{1}{2} x \sin(\log x) + \frac{1}{2} x \cos(\log x)$$

$$= \frac{1}{2} x (\sin(\log x) + \cos(\log x))$$

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I — LEZIONE 076

Titolo nota

18/11/2011

Esempio 1 $\int x^3 e^{x^2} dx$ Pongo $y = x^2$, da cui $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{x^2 e^{x^2}}_{y e^y} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int y e^y dy = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{y e^y}_{F G} - \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{e^y}_{G} dy \right\}$$

$$= \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2}$$

In alternativa si poteva fare per parti scrivendo

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{x^2}_F \cdot \underbrace{2x e^{x^2}}_g dx = \text{come prima senza passare da } y$$

Esempio 2 $\int x \cos^2 x dx$ 1° metodo: direttamente per parti, così devo fare la primitiva di $\cos^2 x$ e poi integrarla

2° metodo: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, quindi $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$, da cui

$$\int x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (x + x \cos(2x)) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \int \underbrace{x}_F \cos(2x) dx =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{x}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \sin(2x)}_G - \int \underbrace{1}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \sin(2x)}_G dx \right\}$$

$$= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin(2x) - \frac{1}{4} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin(2x) + \frac{1}{8} \cos(2x)$$

Esempio 3 $\int_0^4 \sqrt{|x-3|} dx$ Prima cosa da fare: spezzare le zone a seconda del segno di $x-3$.

Ora

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{per } x \geq 3 \\ 3-x & \text{per } x \leq 3 \end{cases}$$

quindi

$$\int_0^4 \sqrt{|x-3|} dx = \int_0^3 \sqrt{3-x} dx + \int_3^4 \sqrt{x-3} dx$$

Calcolo le primitive: $\int \sqrt{x-3} dx = \frac{2}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}}$

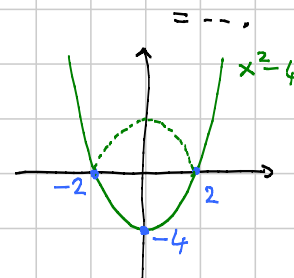
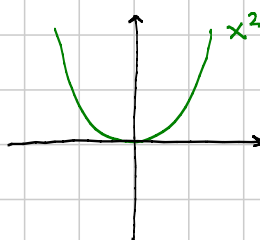
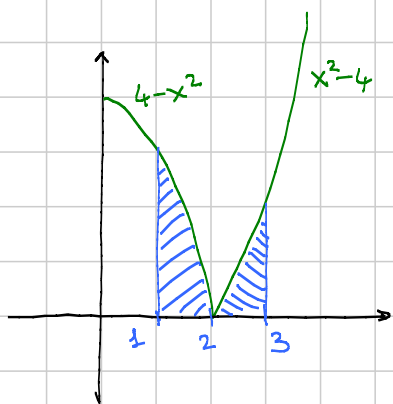
Se uno non lo vede porre $x-3=y$, da cui $dx=dy$, quindi

$$\int \sqrt{x-3} dx = \int \sqrt{y} dy = \int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} y^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}}$$

Altra primitiva: $\int \sqrt{3-x} dx = -\frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}}$

Conclusione $\int_0^3 \sqrt{3-x} dx + \int_3^4 \sqrt{x-3} dx = \left[\frac{2}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 + \left[-\frac{2}{3} (3-x)^{\frac{3}{2}} \right]_3^4$

Esempio 4 $\int_1^3 |x^2-4| dx$



$$= \int_1^2 (4-x^2) dx + \int_2^3 (x^2-4) dx$$

Quello che abbiamo usato in realtà è che

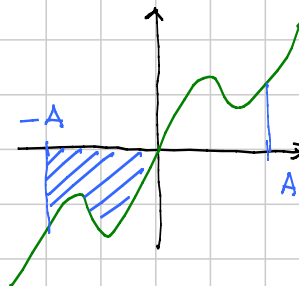
$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{per } x \leq -2 \text{ opp. } x \geq 2 \\ 4-x^2 & \text{per } -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_2^3 = 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = \dots$$

Osservazioni Integrali e simmetrie

* Sia $f(x)$ una funzione dispari. Allora:

$$\int_{-A}^0 f(x) dx = - \int_0^A f(x) dx \quad \forall A > 0$$



In particolare, se $f(x)$ è dispari abbiamo che

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 0 \quad (\text{integrale di funzione dispari su intervallo simmetrico rispetto all'origine})$$

* Se invece $f(x)$ è pari abbiamo che $\int_{-A}^0 f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$ e quindi

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx.$$

Esempio 5 $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

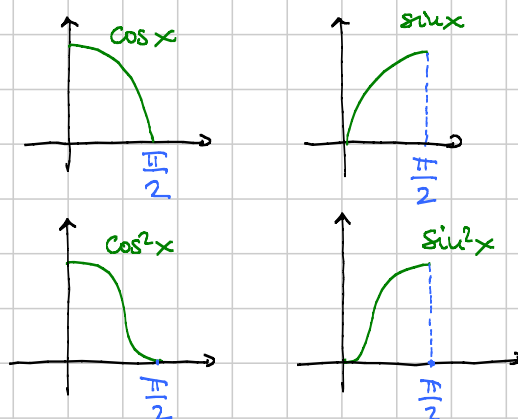
1° metodo: sfruttando la primitiva $= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x \right]_0^{\pi/2} =$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 \cos 0 = \frac{\pi}{4} = \text{metà della lunghez. dell'intervallo}$$

2° metodo: sfruttando le simmetrie

Per simmetria abbiamo che

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$$



D'altra parte

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx + \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ e $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ sono due numeri uguali che sommati danno $\frac{\pi}{2}$, quindi sono entrambi $\frac{\pi}{4}$.

Verifica dell'uguaglianza $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ Pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$, da cui $dy = -dx$

Cambio gli estremi: quando $x=0$ ho che $y = \frac{\pi}{2}$, quando $x = \frac{\pi}{2}$ ho che $y=0$.

Quindi con il cambio di variabili otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \int_{\pi/2}^0 \cos^2 \left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - y}_x \right) \underbrace{(-dy)}_{dx} = - \int_{\pi/2}^0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - y \right) dy \\ &= - \int_{\pi/2}^0 \sin^2 y \, dy = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y \, dy \end{aligned}$$

$\downarrow$
 visto che $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y$
 PRECORSO $\int_b^a$

Oss. Se $[a, b]$ è un intervallo, si intende che

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx \quad \left(\text{coerente con il fatto che } [F(x)]_b^a = - [F(x)]_a^b \right)$$

$\uparrow$
 estremi invertiti

Esempio 6 $\int \log(3x+4) \, dx$ $\int \log x \, dx = x \log x - x$

$$= \frac{1}{3} [(3x+4) \log(3x+4) - (3x+4)]$$

Se uno non lo vede basta porre $y = 3x+4$, da cui $dy = 3 \, dx$

$$\begin{aligned} \int \log(3x+4) \, dx &= \frac{1}{3} \int \underbrace{\log(3x+4)}_{\log y} \cdot \underbrace{3 \, dx}_{dy} = \frac{1}{3} \int \log y \, dy \\ &= \frac{1}{3} (y \log y - y) = \frac{1}{3} ((3x+4) \log(3x+4) - (3x+4)) \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 077

Titolo nota

19/11/2011

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

$$\text{Funzione razionale} = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Algoritmo per fare la primitiva di una funz. razionale:

- 1 - Divisione
- 2 - Fattorizzazione
- 3 - Sistema Lineare
- 4 - Integrazione

① Divisione Se $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$ si passa alla fase success.
Altrimenti si divide $P(x)$ per $Q(x)$ (divisione tra polinomi).

Si ottiene

$$P(x) = Q(x) A(x) + R(x)$$

resto con $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(Q(x))$

Allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) A(x) + R(x)}{Q(x)} = \boxed{A(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Nuova funz. raz.} \\ \text{con grado (num.)} < \\ \text{grado (denom.)} \end{array}$$

↑
polinomio

Conclusione: basta saper fare le primitive di funzioni razionali con $\text{grado}(\text{numeratore}) < \text{grado}(\text{denominatore})$.

Esempio 1 $\int \frac{x}{x+7} dx = \int \frac{x+7-7}{x+7} dx = \int \left(1 - \frac{7}{x+7}\right) dx = x - 7 \log|x+7|$

Esempio 2 $\int \frac{x^5+3}{x^2+1} dx$ Faccio la divisione tra $\boxed{x^5+3}$ e $\boxed{x^2+1}$
 $P(x)$ $Q(x)$

Dalla divisione: $\frac{x^5+3}{x^2+1} = \boxed{x^3-x} + \frac{\boxed{x+3}}{\boxed{x^2+1}}$
 $A(x)$ $\frac{R(x)}{Q(x)}$

Al termine della fase 2 il denominatore risulta il prodotto di fattori del tipo $(ax+b)^m$ e fattori del tipo $(ax^2+bx+c)^m$ con $\Delta < 0$.

③ Sistema lineare Caso semplice: tutte le molteplicità sono uguali ad 1 ("non ci sono esponenti")

Obiettivo: scrivere la funzione razionale da integrare come somma di funzioni razionali che hanno come denominatore i singoli fattori (e numeratore di grado inferiore).

Esempio 1 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{x^2-1} \leftarrow$ termine fase ①

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad \text{Cerco A e B in modo da avere uguaglianza}$$

↑
Fase ②

$$= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{cases} A+B = 1 & (\text{coeff. di } x) \\ -A+B = 0 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} 2A = 1 \\ A = B \end{cases} \quad A = B = \frac{1}{2}$$

Quindi al termine della fase 3 avrò

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| = \log \sqrt{|x^2-1|}$$

Esempio 2 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+x+1)} =$

grado 0 perché
denom. ha grado 1

grado 1 perché
denom. ha grado 2

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Devo quindi supporre

$$\begin{cases} A+B=2 & (\text{coeff. } x^2) \\ A-B+C=0 & (\text{coeff. } x) \\ A-C=3 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A \\ A-2+A+A-3=0 \\ C=A-3 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A=\frac{1}{3} \\ 3A=5 \quad A=\frac{5}{3} \\ C=A-3=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Quindi: } \frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{5}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}}{x^2+x+1} = \frac{5}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \frac{x-4}{x^2+x+1}$$

Sostanzialmente nella somma

* sopra i fattori di grado 1 metto fattori di grado 0, cioè costanti

* " " " " " 2 metto " " " 1, cioè polinomi di grado 1 con i 2 coefficienti incogniti.

Determinare i coeff. incogniti si riduce ad un sistema lineare,
— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 078

Titolo nota

19/11/2011

Esempio 1 (virtuale)

$$\frac{x^3+5}{(2x+1)(x-3)(x-8)(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-8} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{x^2+x+1}$$

Costanti sopra i fattori di grado 1

Fattori di grado 1 sopra quelli di grado 2.

Quante sono le incognite? Sono tante quante grado (denominatore), poiché ogni fattore di grado 1 ha prodotto 1 incognita e ogni fattore di grado 2 ha prodotto 2 incognite.

Quante sono le equazioni? Tante quante i coeff. di $P(x)$, che ha grado $<$ grado del denominatore. Esempio: denominatore ha grado 7, quindi numeratore ha grado ≤ 6 , quindi devo sistemare 7 coeff.

In altre parole: numero incognite = numero equazioni = grado ($Q(x)$).

Fatto generale: il sistema lineare risultante ha sempre soluzione unica, quindi si trovano in maniera univoca i coefficienti.

Esempio 2 $\frac{x+5}{x^2+5x+6} = \frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$

1° metodo: fare il sistema lineare...

2° metodo: moltiplico tutto per $(x+2)$:

$$\frac{x+5}{x+3} = A + B \frac{x+2}{x+3}$$

Oss. funziona con i fattori di 1° grado

Metto $x=-2$ e ottengo $\frac{-2+5}{-2+3} = A + B \cdot 0$, $A=3$

Analogamente moltiplico per $x+3$: $\frac{x+5}{x+2} = A \frac{x+3}{x+2} + B$

e metto $x=-3$ per trovare $B = \frac{-3+5}{-3+2} = \frac{2}{-1} = -2$.

Caso generale: alcuni fattori hanno molteplicità

Esempio (virtuale)

come prima facendo finta che non ci siano molteplicità

$$\frac{P(x)}{(x+1)^4(x+5)^2(x+7)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x+7} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Fx^7+Gx^6+Hx^5+Ix^4+Jx^3+Kx^2+Lx+M}{(x+1)^3(x+5)(x^2+1)^2}$$

numeratore a coeff. incogniti di grado inferiore di $\pm$ rispetto al denominatore,

Parte non utilizzata del denominatore

Oss. Ancora una volta il numero di incognite è uguale a quello delle equazioni.

Esempio 1

$$\frac{x+2}{x^4+x^3} = \frac{x+2}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx^2-2x(Cx+D)}{x^4}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx-2Cx-2D}{x^3}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} - \frac{Cx+2D}{x^3}$$

$$= \frac{Ax^2(x+1) + Bx^3 - (Cx+2D)(x+1)}{x^3(x+1)}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax^2 + Bx^3 - Cx^2 - Cx - 2Dx - 2D}{x^3(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (\text{coeff. } x^3) \\ A-C=0 & (\text{coeff. } x^2) \\ -C-2D=1 & (\text{coeff. } x) \\ -2D=2 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{aligned} B &= -A = -1 \\ A &= C = 1 \\ C &= -2D-1 = 1 \\ D &= -1 \end{aligned}$$

se i conti sono giusti:

$$\frac{x+2}{x^4+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{x-1}{x^2}$$

Suggerimento: verificare che la somma torni!

A questo p.to
$$\int \frac{x+2}{x^4+x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{d}{dx} \frac{x-1}{x^2} dx$$

$$= \log|x| - \log|x+1| + \frac{x-1}{x^2}$$

(Verificare la primitiva!)

Esempio 2
$$\int \frac{x+3}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\frac{x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx^2 + C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B - Cx^2 + C - 2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A=0 & (\text{coeff. } x^3) \\ B-C=0 & (\text{coeff. } x^2) \\ A-2D=1 & (\text{coeff. } x) \\ B+C=3 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=C=\frac{3}{2} \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{3x-1}{x^2+1}$$

da cui integrando:

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{3x-1}{x^2+1} \quad (\text{verificare!})$$

④ Integrare Integrare gli addendi provenienti dalla fase 3.

* Quelli con il $\frac{d}{dx}$ si integrano banalmente (si toglie $\frac{d}{dx}$...)

* Quelli del tipo $\frac{A}{ax+b}$ si integrano facilmente

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \log|ax+b|$$

* Restano gli addendi del tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ con $\Delta = b^2-4ac < 0$

Volevo ci sarebbe una formula...

Questi si fanno con un po' di log ed un po' di arctan...

Esempio $\int \frac{x-4}{x^2+x+1} dx$

Oss. Il denominatore si può sempre scrivere come quadrato $+$ numero

sempre vero
quando
 $\Delta < 0$.

$$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \text{ quindi}$$

$$\frac{x-4}{x^2+x+1} = \frac{x-4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \quad \text{Questo suggerisce il cambio } y = x + \frac{1}{2}$$

da cui $dx = dy$

$$\int \frac{x-4}{x^2+x+1} dx = \int \frac{y-\frac{1}{2}-4}{y^2+\frac{3}{4}} dy = \int \frac{y}{y^2+\frac{3}{4}} dy - \frac{9}{2} \int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}} dy$$

logaritmo arctan

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 079

Titolo nota

19/11/2011

Esempio 1 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ Pongo $y = e^x$, da cui $\frac{dy}{dx} = e^x$, $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y = \arctan(e^x)$$

Esempio 2 $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$

1° metodo: come prima Pongo $y = e^x$, da cui $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dy} = \int \frac{1}{y(1+y^2)} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{A + Ay^2 + By^2 + Cy}{y(1+y^2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (\text{coeff. } x^2) \\ C=0 & (\text{coeff. } x) \\ A=1 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \int \frac{1}{y} dy - \int \frac{y}{1+y^2} dy$$

$$= \log|y| - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

Tornando in x :

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \log|e^x| - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) = x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$$

2° metodo: Pongo $y = 1+e^{2x}$, da cui $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$, quindi $dy = 2e^{2x} dx$

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\frac{1}{y-1}} \underbrace{\frac{1}{1+e^{2x}}}_{\frac{1}{y}} \underbrace{2e^{2x} dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{(y-1)y}$$

$$\frac{1}{(y-1)y} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y} = \frac{Ay + By - B}{(y-1)y} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Quindi $\int \frac{1}{(y-1)y} dy = \int \frac{1}{y-1} dy - \int \frac{1}{y} dy = \log|y-1| - \log|y|$

Tornando in x

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(y-1)y} dy = \frac{1}{2} \log|y-1| - \frac{1}{2} \log|y| \\ &= \frac{1}{2} \log|e^{2x}| - \frac{1}{2} \log|1+e^{2x}| \\ &= x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) \end{aligned}$$

Fatto generale: se l'integranda è una funzione razionale di e^x , la sostituzione $y = e^x$ lo trasforma in una funzione razionale (ma anche altre sostituzioni possono andare bene o meglio)

Esempio 3 $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$

Pongo $y = \sin x$, da cui $dy = \cos x \cdot dx$, quindi

$$\int \frac{1}{1 - \sin^2 x} \cdot \cos x dx = \int \frac{1}{1 - y^2} dy = - \int \frac{1}{y^2 - 1} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} \quad \text{Però si può fare il sistema lineare}$$

Moltiplico per $(y+1)$: $\frac{1}{y-1} = A + B \frac{y+1}{y-1}$. Metto $y = -1$ e ho $A = -\frac{1}{2}$

Moltiplico per $(y-1)$: $\frac{1}{y+1} = A \frac{y-1}{y+1} + B$. Metto $y = 1$ e ho $B = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \int \frac{1}{y^2 - 1} dy &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y+1} dy + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y-1} dy \\ &= -\frac{1}{2} \log|y+1| + \frac{1}{2} \log|y-1| \end{aligned}$$

Torno in x :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= - \int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \frac{1}{2} \log|y+1| - \frac{1}{2} \log|y-1| \\ &= \frac{1}{2} \log|\sin x + 1| - \frac{1}{2} \log|\sin x - 1| \end{aligned}$$

La risposta si può scrivere in tanti modi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(\sin x + 1) - \frac{1}{2} \log(1 - \sin x) &= \frac{1}{2} \log \frac{\sin x + 1}{1 - \sin x} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sin x + 1}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{2} \log \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} = \log \left(\frac{1 + \sin x}{|\cos x|} \right) \end{aligned}$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx$

Pongo $y = \cos x$, da cui $dy = -\sin x dx$

$$= - \int \frac{1}{(1 - \cos^2 x)^2} \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int \frac{1}{(1 - y^2)^2} dy \quad \text{Funzione razionale.}$$

Fatto generale: lo stesso metodo permette di trattare potenze negative dispari di $\sin x$ e $\cos x$.

Esempio 5 $\int \frac{x+5}{\sqrt{x+3}} dx$ Pongo $y = \sqrt{x}$ $\rightarrow$ quindi $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{y^2+5}{y+3} \underbrace{2y dy}_{dx}$$

$$= 2 \int \frac{y^3+5y}{y+3} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

$$\begin{array}{r} y^3 + 5y \\ -y^3 - 3y^2 \\ \hline -3y^2 + 5y \\ +3y^2 + 9y \\ \hline 14y \\ -14y - 42 \\ \hline -42 \end{array} \quad \begin{array}{r} y+3 \\ y^2-3y+14 \end{array}$$

Dalla divisione abbiamo che
 $y^3 + 5y = (y+3)(y^2-3y+14) - 42$
 da cui

$$\frac{y^3+5y}{y+3} = y^2-3y+14 - \frac{42}{y+3}$$

quindi

$$\int \frac{y^3+5y}{y+3} dy = \int \left(y^2-3y+14 - \frac{42}{y+3} \right) dy = \frac{1}{3} y^3 - \frac{3}{2} y^2 + 14y - 42 \log|y+3|$$

e infine

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{x+3}} dx = 2 \int \frac{y^3+5y}{y+3} dy = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 3x + 28\sqrt{x} - 84 \log(\sqrt{x}+3)$$

Esempio 6 $\int \frac{x+5}{\sqrt[3]{x+7}} dx$ Pongo $y = \sqrt[3]{x}$, da cui $x = y^3$, quindi $dx = 3y^2 dy$

$$= \int \frac{y^3+5}{y+7} \underbrace{3y^2 dy}_{dx} = 3 \int \frac{y^3+5y^2}{y+7} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

Esempio 7 $\int \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt[3]{x+7}} dx$ Pongo $y = \sqrt[6]{x}$, da cui $x = y^6$, quindi $dx = 6y^5 dy$

$$= \int \frac{\sqrt{y^6}+5}{\sqrt[3]{y^6+7}} \cdot 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^3+5}{y^2+7} y^5 dy \quad \text{Funzione razionale}$$

Oss. La stessa cosa funzionava se invece di $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$ c'erano $\sqrt{ax+b}$ e $\sqrt[3]{ax+b}$.

La cosa importante è che la cosa sotto radice sia sempre la stessa. L'indice della radice usata nella sostituzione è il minimo comune multiplo.

Esempio 8 $\int \sqrt{\frac{2x+3}{3x-1}} dx$ Pongo $y = \sqrt{\frac{2x+3}{3x-1}}$, da cui

$$y^2 = \frac{2x+3}{3x-1}, \quad 3y^2x - y^2 = 2x+3$$

$$x(3y^2-2) = y^2+3, \quad x = \frac{y^2+3}{3y^2-2}, \quad \text{da cui}$$

$$dx = \left(\frac{y^2+3}{3y^2-2} \right)' dy$$

$$= \int y \underbrace{\left(\frac{y^2+3}{3y^2-2} \right)'}_{dx} dy \quad \text{Funzione razionale}$$

$F = \frac{p}{q}$ e via per parti...

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 080

Titolo nota

23/11/2011

Integrali di funzioni del tipo $\sqrt{\text{polinomio di 2° grado}}$ Esempio 1 $\int \sqrt{x^2+1} dx$ Sostituzione: $\sqrt{x^2+1} = x+y$ (che è come dire $y = \sqrt{x^2+1} - x$)Devo ricavare x in funzione di y . Faccio il quadrato

$$\cancel{x^2}+1 = \cancel{x^2}+2xy+y^2 \quad \text{Così diventa di 1° grado in } x$$

$$2xy = 1-y^2 \quad x = \frac{1-y^2}{2y} \quad dx = \left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy$$

Ottengo così che

$$\int \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{x+y} dx = \int \underbrace{\left(\frac{1-y^2}{2y} + y\right)}_{x+y} \underbrace{\left(\frac{1-y^2}{2y}\right)'}_{dx} dy \quad \text{da qui in poi è razionale}$$

$$= \int \frac{1-y^2+y^2}{2y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} - y\right)' dy = \frac{1}{4} \int \frac{1+y^2}{y} \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{(y^2+1)^2}{y^3} dy = -\frac{1}{4} \int \frac{y^4+2y^2+1}{y^3} dy = -\frac{1}{4} \int \left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dy$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} y^2 + 2 \log |y| - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2}\right)$$

Ora dovrei tornare in x ponendo $y = \sqrt{x^2+1} - x$, il che è un conto.Oss.1 Ciò che ha fatto funzionare la sostituzione è che dopo aver fatto il quadrato abbiamo ottenuto un'eq. di 1° grado di x Oss.2 Se dovessi fare un integrale con ebrei, non servirei ritornare in x .

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

Quando pongo $y = \sqrt{1+x^2} - x$ cambio gli estremi:

* quando $x=0$ ho che $y=1$

* quando $x=1$ ho che $y = \sqrt{2}-1$

$$= \int_1^{\sqrt{2}-1} \dots dy = \left[-\frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{2}|\log y| + \frac{1}{8}\frac{1}{y^2} \right]_1^{\sqrt{2}-1} = \text{basta sostituire.}$$

Esempio 2 $\int \sqrt{3x^2-5x+7} dx$

Pongo $\sqrt{3x^2-5x+7} = \sqrt{3}x + y$. Infatti se faccio il quadrato:

$$3x^2 - 5x + 7 = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 \quad \text{È diventato di 1° grado in } x$$

$$x(2\sqrt{3}y+5) = 7-y^2 \quad \text{da cui} \quad x = \frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} \quad dx = \left(\frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} \right)' dy$$

Quindi:

$$\text{integrale dato} = \int \underbrace{\left\{ \sqrt{3} \frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} + y \right\}}_{\sqrt{3}x+y} \underbrace{\left(\frac{7-y^2}{2\sqrt{3}y+5} \right)'}_{dx} dy$$

Funzione razionale della variabile y ...

Fatto generale! se ho $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$ posso pome

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + y \quad \text{e questa funziona se } a > 0.$$

Esempio 3 $\int \sqrt{1-x^2} dx$ Si faceva con $x = \sin y$, da cui $dx = \cos y dy$

$$\begin{aligned} &= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\cos y dy}_{dx} = \int \cos^2 y dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\cos y \sin y \quad \text{e} \\ &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2 y} \cdot \sin y \\ &\text{da qui si conclude tornando in } x \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \cdot x \end{aligned}$$

Idea: $\int \sqrt{1+x^2} dx$

Ricordiamo che $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$

Pongo quindi $x = \sinh y$, da cui $dx = \cosh y \cdot dy$

$$= \int \sqrt{1 + \sinh^2 y} \cdot \cosh y dy = \int \cosh^2 y dy$$

Ci sono 3 modi per calcolare questa primitiva:

- * usare la formula per $\cosh y$ in funzione degli esponenziali
- * usare la formula di duplicazione $\cosh(2y) = \dots$
- * parti + grande ritorno:

$$\int \cosh^2 y dy = \int \underbrace{\cosh y}_F \cdot \underbrace{\cosh y}_G dy = \underbrace{\cosh y}_F \cdot \underbrace{\sinh y}_G - \int \underbrace{\sinh^2 y}_F \underbrace{dy}_G$$

$$= \cosh y \cdot \sinh y + \int (1 - \cosh^2 y) dy$$

$$= \cosh y \cdot \sinh y + y - \underbrace{\int \cosh^2 y dy}_{\text{grande ritorno}}$$

Portando a sx e ricavando otteniamo che

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 y dy &= \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \cosh y \cdot \sinh y = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sinh^2 y} \cdot \sinh y \\ &= \frac{1}{2} \text{Settsinh } x + \frac{1}{2} \sqrt{1 + x^2} \cdot x \end{aligned}$$

Esercizio: controllare che la primitiva ottenuta in questo modo
coincida con quella ottenuta con l'altra sostituzione.

Altro modo per fare $\int \sqrt{1-x^2} dx$. Scomponiamo il polinomio sotto radice, e poniamo

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} = y(1+x) \quad [y: \text{uno dei 2 fattori}]$$

Faccio i quadrati:

$$\cancel{(1+x)}(1-x) = y^2(1+x)$$

Come prima diventa di 1° grado in x : $1-x = y^2 + y^2 x$

$$x(y^2+1) = 1-y^2, \quad x = \frac{1-y^2}{y^2+1}, \quad \text{da cui } dx = \left(\frac{1-y^2}{y^2+1}\right)' dy$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \underbrace{y \left(1 + \frac{1-y^2}{y^2+1}\right)}_{y(1+x)} \left(\frac{1-y^2}{y^2+1}\right)' dy = \int y \cdot \frac{2}{y^2+1} \left(\frac{1-y^2}{y^2+1}\right)' dy$$

Con qualche calcolo si fa $\underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}$

Esempio 4 $\int \sqrt{4-3x-x^2} dx$ Scompongo il polinomio di 2° grado
 $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$, quindi pongo

$$\sqrt{(x+4)(1-x)} dx = y(x+4) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{(x+4)(1-x)} = y(1-x)$$

Fatto generale Se il polinomio di 2° grado ha 2 radici reali λ, μ , allora posso porre

$$\sqrt{\text{polinomio}} = y(x-\lambda) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\text{polinomio}} = y(x-\mu).$$

Riassumendo: per $\sqrt{\text{polinomio di 2° grado}} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ abbiamo questa situazione

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$\sqrt{\dots} = \sqrt{a}x + y$ Fattorizz.	Fattorizz.
$\Delta < 0$	$\sqrt{\dots} = \sqrt{a}x + y$	?

Il quarto caso non si pone in quanto se $a < 0$ e $\Delta < 0$, allora il polinomio è sempre < 0 , quindi la funzione non è definita per nessun valore di x .

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 081

Titolo nota

23/11/2011

Sostituzione razionalizzante per integrali con $\sin x$ e $\cos x$

ULTIMA SPIAGGIA: usare formule parametriche.

Ponendo $y = \tan \frac{x}{2}$ si ha che $\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$ $\cos x = \frac{1-y^2}{y^2+1}$

In questo modo $\sin x$ e $\cos x$ vengono rimpiazzati da funzioni razionali di y . Cosa succede a dx ?

Ricavo x : $\frac{x}{2} = \arctan y$, quindi $x = 2 \arctan y$, quindi $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$, che è razionale.

Esempio 1 $\int \frac{1}{\sin x} dx$ Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$, da cui $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$

$$\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$$

$$= \int \underbrace{\frac{y^2+1}{2y}}_{\frac{1}{\sin x}} \underbrace{\frac{2}{1+y^2} dy}_{dx} = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

Altro modo di fare lo stesso:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Pongo $y = \cos x$, da cui $dy = -\sin x dx$ e ottengo

$$= \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x - 1} dx = \int \frac{dy}{y^2 - 1} = -\frac{1}{2} \log |y+1| + \frac{1}{2} \log |y-1| = \dots \text{ si ferma in } x$$

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay - A + By + B}{(y+1)(y-1)} \quad \begin{cases} A+B=0 & A=-\frac{1}{2} \\ -A+B=1 & B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{y^2-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y-1}$$

Esempio 2 $\int \arcsin x \, dx$

$$= \int \underbrace{1}_{g} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{F} \, dx = \underbrace{x}_{G} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{F} - \int \underbrace{x}_{G} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{f} \, dx$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Per calcolare $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ si possono usare le sostituzioni già usate per la primitiva di $\sqrt{1-x^2}$.

Tuttavia in questo è più comodo

porre $y = 1-x^2$, da cui $dy = -2x \, dx$, da cui

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{y}}} \underbrace{(-2x \, dx)}_{dy} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = -\sqrt{y} \, dy = -\sqrt{1-x^2}$$

In conclusione:

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad (\text{verifica!})$$

In maniera analoga si calcola $\int \arccos x \, dx$.

Esempio 3 $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} \, dx$

1° modo Formule parametriche: angoli!

$$\text{2° modo} \quad \text{Pecorso} = 8 \int \frac{1}{8 \sin^3 x \cos^3 x} \, dx = 8 \int \frac{1}{\sin^3(2x)} \, dx$$

$$= 8 \int \frac{\sin(2x)}{\sin^4(2x)} \, dx = 8 \int \frac{\sin(2x)}{(1-\cos^2(2x))^2} \, dx$$

Pongo $y = \cos(2x)$, da cui $dy = -2 \sin(2x)$ e viene $-4 \int \frac{dy}{(1-y^2)^2}$
e questo si fa.

$$\frac{1}{(1-y^2)^2} = \frac{1}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{(y+1)^2(y-1)^2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{d}{dy} \frac{Cy+D}{y^2-1}$$

e da qui si conclude.

3° modo Moltiplico sopra e sotto per $\cos x$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^3 x \cos^4 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x (1-\sin^2 x)^2} dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ y = \sin x}}{=} \int \frac{dy}{y^3(1-y^2)^2}$$

che è razionale, ma un po' peggio di prima.

4° modo $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

$$= \int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx + \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$$

e questi si fanno con gli stessi metodi

4° modo bis $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

$$= \int \frac{\cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx + 2 \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x}$$

$\uparrow$
se proprio avendo
posto $y = \sin x$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x}$$

se proprio avendo
posto $y = \cos x$

Resta da fare $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx \xrightarrow{\sin(2x) = \dots}$ Moltiplico sopra e sotto per $\sin x$ o $\cos x$
 $\rightarrow 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= -\log |\cos x| + \log |\sin x|$$

Esempio 4 $\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} - \cos^2 x \right| dx$

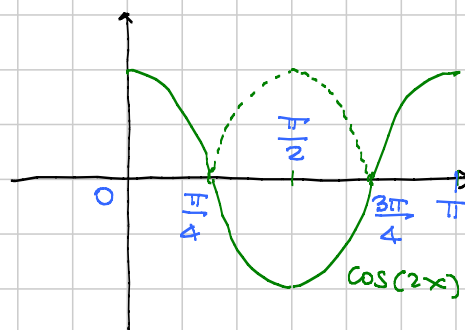
Bisogna capire dove l'integranda è ≥ 0 e dove è ≤ 0 .

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \text{ quindi}$$

$$\text{integrale iniziale} = \int_0^{\pi} \left| \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right| dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\cos(2x)| dx$$

Si tratta di capire il segno di $\cos(2x)$ per $x \in [0, \pi]$

$\cos(2x)$ è come $\cos x$, solo con il periodo dimezzato



[formula preconsistita: risolvere

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{cioè} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

quindi in particolare ho 4 soluzioni in $[0, 2\pi]$]

Tornando all'integrale

$$\int_0^{\pi} |\cos(2x)| dx = \int_0^{\pi/4} |\cos(2x)| dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\cos(2x)| dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} |\cos(2x)| dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(2x) dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \cos(2x) dx$$

levato $\frac{1}{2}$
dopo video

cambio di segno perché

$|\cos(2x)| = -\cos(2x)$ nella zona

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 082

Titolo nota

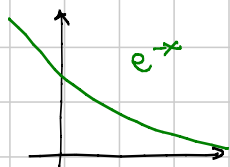
24/11/2011

Integrali impropri

Integrali propri : * zona di integrazione limitata (intervallo $[a, b]$)
 * funzione integranda limitata

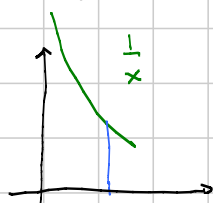
Un integrale si dice improprio se manca uno o tutti e 2 i requisiti

Esempi $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$



Funzione limitata
 Zona integr.: NO

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$



Zona integr. limitata
 integranda: NO

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$



Qui ci sono entrambi
 i problemi

Integrali impropri MONOPROBLEMA, cioè con un problema solo

Due tipologie

① Zona di integrazione = semiretta $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ oppure $\int_{-\infty}^a f(x) dx$
 integranda $f(x)$ limitata

② Zona di integrazione = intervallo $[a, b]$ (quindi limitata)
 Integranda $f(x)$ non limitata nell'intorno di $x=a$ oppure $x=b$
 (e solo in uno dei 2 estremi)

Se un integrale improprio ha più di un problema, come prima cosa occorre spezzarlo in somme di integrali monoprobema.

Esempi (di spezzamento) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{solo problema in } 0} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{\text{solo problema a } +\infty}$

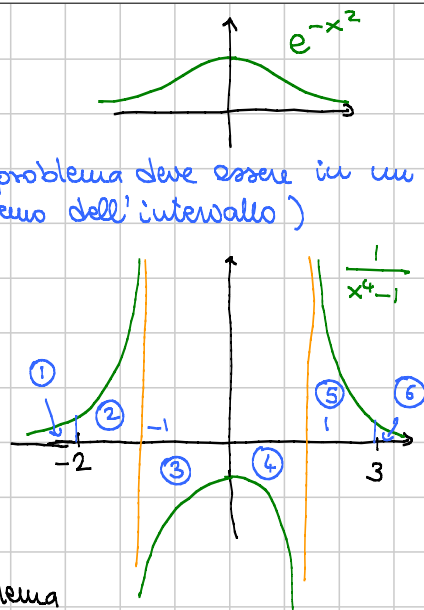
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^5 e^{-x^2} dx + \int_5^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{20}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^{20}} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^{20}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$

(il problema deve essere in un estremo dell'intervallo)



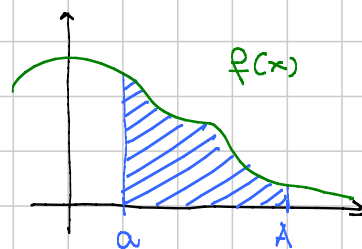
Il primo e l'ultimo hanno come unico problema la zona di integrazione, i restanti da non limitatezza dell'integranda in un estremo.

Definizioni nei casi MONOPROBLEMA

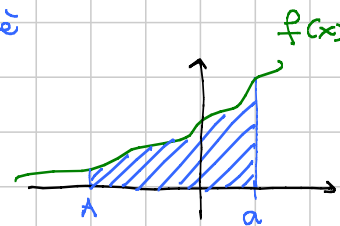
Caso ① Zona di integrazione = semiretta

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Fissato A , si tratta di un integrale PROPRIO, perché $f(x)$ è limitata per ipotesi.



$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$$



Esempio 1

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-A} + 1] = 1 \end{aligned}$$

↓
0

Si dice in questo caso che l'integrale improprio converge, e fa 1.

Oss. Un integrale improprio, essendo un limite, ha 4 possibili comportamenti...

Esempio 2
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_1^A$$

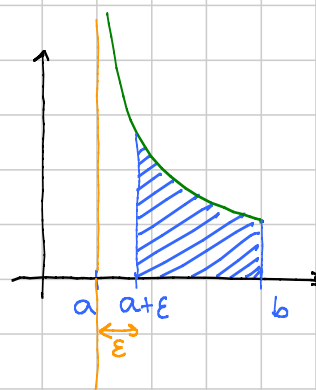
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\underbrace{\log A}_{+\infty} - \underbrace{\log 1}_0) = +\infty$$

L' integrale improprio diverge a $+\infty$,

Caso ② Zona integrazione = intervallo $[a, b]$
 Integranda $f(x)$ non limitata in
 un intorno di a .

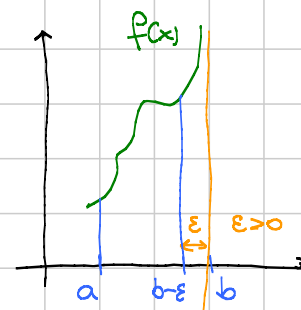
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

ad ε fissato questo integrale è
 proprio perché il unico problema è in a ,



Se il problema di $f(x)$ è la non limitatezza
 intorno all' estremo b , allora

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$



Esempio 1
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{2}$$

Esempio 2
$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x \log x - x]_{\varepsilon}^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\underbrace{1 \log 1}_0 - 1 - \underbrace{\varepsilon \log \varepsilon}_{\text{indeterminato}} + \underbrace{\varepsilon}_0) = -1$$

Le definizioni date coprono il caso monoproblema.

Se l'integrale ha più problemi

- * si spezza in integrali con un problema solo
- * si studiano separatamente i vari pezzi
- * si deduce il comportamento globale sulla base dei singoli pezzi (con le regole di somma e differenza in $\bar{\mathbb{R}}$), con l'accordo che se almeno un pezzo diverge a $+\infty$ e almeno un pezzo diverge a $-\infty$, allora quello complessivo si dichiara indeterminato.

Esempio 3

$$\int_{\pi}^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^A \cos x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\sin x]_{\pi}^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\sin A - \sin \pi] = \text{N.E.}$$

0

L'integrale è indeterminato.

Esempio 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctan A - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{o si usa la definizione, o il fatto che l'integrandola è pari})$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 083

Titolo nota

24/11/2011

Problema: stabilire se un integrale improprio converge o no senza usare la definizione (primitiva + limite)

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ (fatto prima)

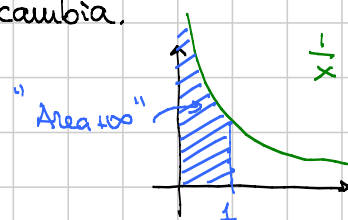
$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_{\varepsilon}^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 1 - \log \varepsilon) = +\infty$$

"0"
" $-\infty$ "

Oss. In entrambi gli esempi posso sostituire l'estremo 1 con qualunque numero $a > 0$ e l'esito non cambia.

Brutalmente, se sostituisco 1 con a , quello che cambia è l'integrale tra 1 e a (oppure tra a e 1), che in ogni caso è una quantità finita.



Esempio 2 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ con $\alpha \neq 1$ (perché $\alpha = 1$ l'abbiamo fatto)

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\alpha+1} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) \quad \text{Quanto fa il limite?}$$

* Se $\alpha > 1$, allora $\lim_{A \rightarrow +\infty} \dots = \frac{1}{\alpha-1}$ che è un numero, quindi l'integrale converge.

* Se $\alpha < 1$, allora $\lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{-\alpha+1}}_{\text{costante} > 0} \left(\underbrace{\frac{1}{A^{\alpha-1}}}_{+\infty} - 1 \right) = +\infty$, dunque l'integrale diverge a $+\infty$.

Conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Tabellina

Oss. Non cambia nulla se sostituisco l'estremo di integrazione 1 con qualunque altro estremo $a > 0$ (lo spantiacque è sempre $\alpha = 1$).

Esercizio Dimostrare che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x [\log x]^\alpha} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Idea: fare la primitiva ponendo $y = \log x$, da cui $dy = \frac{1}{x} dx$.

Esempio 3 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ (stessa integranda di prima, ma ora il problema è in $x=0$) sempre con $\alpha \neq 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right).$$

* Se $\alpha > 1$, allora $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) = +\infty$

$\downarrow$
 numero
negativo
 $\downarrow$
 $+\infty$

* Se $\alpha < 1$, allora $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{1-\alpha} > 0$

$\downarrow$
 0

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Tabellina (sostanzialmente è il contrario del caso $a = +\infty$)

Posso sostituire $x=1$ con ogni estremo $a > 0$

Brutalmente: tra 1 e $+\infty$ più l'esponente è grande, più la funzione è piccola, più è facile che l'area sotto sia finita.

Tra 0 e 1 il discorso si capovolge: più l'esponente è piccolo, + la funzione è piccola, più è facile che l'integrale converga.

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x e^{-x} dx = (\star)$

Da parte ui calcolo la primitiva per parti

$$\int \underbrace{x}_{F} \underbrace{e^{-x}}_g dx = \underbrace{x}_{F} \underbrace{(-e^{-x})}_G - \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_G dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$(\star) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A x e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} [-\underbrace{Ae^{-A}}_{0} - \underbrace{e^{-A}}_{0} + \underbrace{0 \cdot e^0}_{0} + \underbrace{e^0}_{1}] = 1.$$

$\frac{A}{pA}$: esponenziale batte potenza

Esempio 3 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$ Modo sbagliato $= \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Si tratta di un integrale improprio con problemi in $x=0$ (la funzione integranda non è limitata).

Per prima cosa si spezza

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{+\infty}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx = +\infty \quad (\text{è in tabellina e } \alpha = 3 \text{ è un esponente che a } 0 \text{ dà divergenza})$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx = -\infty \quad (\text{volendo per simmetria oppure usando la definizione})$$

L'integrale globale, essendo somma di uno che fa $+\infty$ e uno che fa $-\infty$, per definizione è INDETERMINATO.

Brutalmente: la teoria vieta la compensazione tra $+\infty$ e $-\infty$, anche se geometricamente uguali.

Si potrebbe definire $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$ prendendo

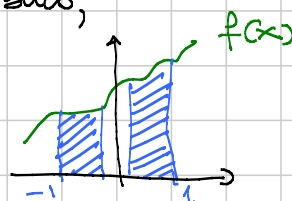
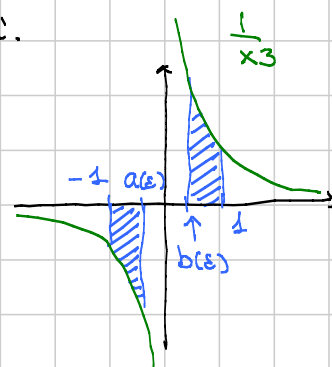
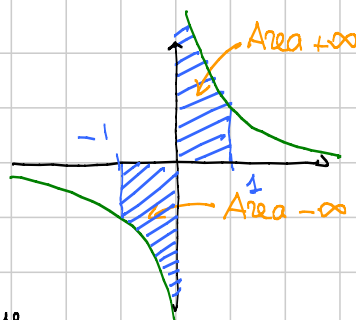
due funzioni $a(\varepsilon) \rightarrow 0^-$ e $b(\varepsilon) \rightarrow 0^+$ e calcolare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{a(\varepsilon)} \frac{1}{x^3} dx + \int_{b(\varepsilon)}^1 \frac{1}{x^3} dx \quad (\text{sto facendo un buco intorno a } 0)$$

1° modo: buco simmetrico $a(\varepsilon) = -\varepsilon$ $b(\varepsilon) = \varepsilon$.
Calcolo il limite e viene 0.

2° modo: buco "asimmetrico": $a(\varepsilon) = -\varepsilon$ $b(\varepsilon) = 2\varepsilon$
Calcolo il limite e viene $-\infty$

Per un integrale proprio, se uno fa un buco la cui ampiezza tende a 0, l'integrale converge a quello senza buco, e il tutto non dipende dalla simmetria o no del buco. Se voglio lo stesso per gli integrali impropri devo vietare la compensazione.



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 084

Titolo nota

25/11/2011

Studio della convergenza di integrali impropri monoproblema

$$\int_E f(x) dx \quad E = \text{zona di integrazione}$$

Integrandola $f(x)$ a segno costanteIntegrandola $f(x)$ a segno variabile

Criterio del confronto

Criterio del confronto asintotico

↑ casi standard
↓ casi limite

Criterio assoluta integrab.

Notazione. Per gli integrali monoproblema dico che

- il problema è a $+\infty$ se $E = [a, +\infty)$ e $f(x)$ è limitata
- " " $-\infty$ se $E = (-\infty, a]$
- il problema è in $x_0 = a$ se $E = [a, b]$ e $f(x)$ non è limitata nell'intorno di a
- idem se il problema è in b .

Fatto importante Se $f(x) \geq 0$ in un intorno del problema, allora
 l'integrale improprio monoproblema può solo
 * convergere,
 * divergere a $+\infty$.

Criterio del confronto

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$ (ma basta che sia per ogni $x \in E$ in un intorno del problema). Allora

$$\int_E g(x) dx < +\infty \text{ (cioè converge)} \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

Achtung! Tutte le altre implicazioni sono in generale false.

Criterio del confronto asintotico Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$

Casi standard Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0, \neq +\infty$

↓
pto in cui c'è il problema

Allora l'integrale improprio di $f(x)$ e quello di $g(x)$, con unico problema in x_0 , hanno lo stesso comportamento, cioè uno converge se e solo se converge l'altro.

Casi limite Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al problema, quindi $f(x) \leq g(x)$ vicino al problema (ho usato che $g(x) > 0$ per moltiplicazione conservando i versi), quindi per confronto standard]

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty ; \quad \int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ [Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ vicino ad x_0
quindi $f(x) \geq g(x)$ -
quindi]

$$\int_E g(x) = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) = +\infty ; \quad \int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \text{boh.}$$

Achtung! Questi criteri valgono per integrande ≥ 0 e per integrali con un unico problema.

Esempio 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{diverge a } +\infty \text{ perché } \alpha = 2 \geq 1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{\text{converge perché } \alpha = 2 > 1} = +\infty$$

Oss. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ questo diverge per ogni $\alpha > 0$ perché ogni α "va male" a 0 oppure a $+\infty$ ($\alpha=1$ va male in tutti e 2 i casi)

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{x^3+7} dx$ Volendo si potrebbe usare la definizione, ma occorre fare la primitiva

In alternativa: $f(x) \geq 0$, quindi applico i criteri

Brutale: $f(x) \sim \frac{2x}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}$

Quindi l'integrale dato si comporta come $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, quindi diverge

ASSOLUTAMENTE NO!!!!

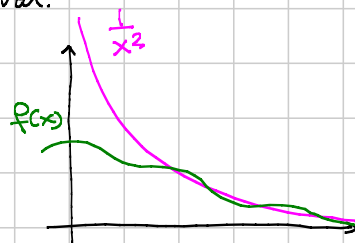
L'integrale dato ha come unico problema $+\infty$ (la funzione è limitata perché il denominatore non si annulla). Faccio il confronto con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^3+7} \cdot x^2 = 2 \neq 0 \neq +\infty$$

p.to in cui ho il problema

Quindi l'integrale improprio di $f(x)$, con unico problema a $+\infty$, si comporta come l'integrale improprio di $g(x)$, con unico problema a $+\infty$. Ora l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$ converge, quindi converge quello di partenza.

Geometricamente: $f(x)$ e $g(x)$ si "assomigliano" per x grandi. Invece $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge per colpa del comportamento in $x=0$, dove $f(x)$ e $g(x)$ non si assomigliano.



Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{x+7}{x^2+3x+1} dx$ $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$

$f(x) \sim \frac{1}{x}$, quindi l'integrale dato si comporta come $\int \frac{1}{x} dx$ con problema a $+\infty$, quindi diverge.

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx$ Ci sono 2 problemi: a 0 e a $+\infty$

$\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx$ + $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} dx$
converge converge

L'integrale con problema a $+\infty$ converge per confronto asintotico con $\frac{1}{x^3}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \cdot x^3 = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

L'integrale con problema a 0 converge per conf. asint. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2\sqrt{x}+1} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'int. improprio di $f(x)$ con problema a 0 si comporta come l'int. improprio di $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con problema a 0, quindi converge.

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ Problemi in 0 e $+\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ Confronto classico $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{122}{x\sqrt{x}} = \frac{122}{x^{3/2}}$

L'integrale di $\frac{1}{x^{3/2}}$ con problema a $+\infty$ converge ($\frac{3}{2} > 1$), quindi converge anche quello dato.

Per il problema in 0 $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi converge.

Rigoroso: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 1 \neq 0 \neq +\infty$ quindi...

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 085

Titolo nota

25/11/2011

Esempio 1 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ Integrale con unico problema in $x=0$
 e integranda $f(x) \geq 0$, anzi $f(x) > 0$
 (perché $\sin x > 0$ per ogni $x \in (0, 1]$)

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x}$, quindi l'integrale diverge.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} \cdot x = 1 \neq 0 \neq \pm \infty \dots$$

Esempio 2 $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

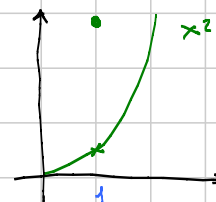
Da non pensare nemmeno: $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, quindi diverge
 questa vale quando l'argomento
 di $\sin$ tende a 0, e qui non succede

Achtung! La zona di integrazione è $[0, 1]$, quindi limitata
 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ per ogni $x > 0$, quindi l'integranda è
 limitata

Quindi si tratta di un integrale proprio, che quindi converge per forza.
 (In realtà bisognerebbe dimostrare che è integrabile, ma questa è
 una finetta)

Osservazione L'integrale se ne frega del valore di una funzione in
 un singolo pto. Se pago

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1 \\ 15 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 dx \quad (\text{esercizio: dimostrarlo per bene!})$$

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^3)}{x^2} dx$

Apparentemente ci sono problemi in 0 e $+\infty$ $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

Per il problema uso che

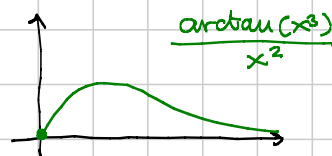
$$\frac{\arctan(x^3)}{x^2} \leq \frac{30}{x^2} \quad \text{e ottengo che converge}$$

Per il problema in 0 abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^3)}{x^2} = 0$,

quindi la funzione è limitata vicino all'origine, quindi il problema in $x=0$ non esiste e l'integrale originario ora in realtà non è un problema.

Altro modo di dirlo

$\int_0^1 \frac{\arctan(x^3)}{x^2} dx$ è un integrale proprio



Absoluta integrabilità

Se $\int_E |f(x)| dx$ converge, allora $\int_E f(x) dx$ converge

Se $\int_E |f(x)| dx = +\infty$, allora boh, nel senso che restano aperte le 4 possibilità per $\int_E f(x) dx$.

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$ Problemi in 0 e a $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^3} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{quindi l'integrale dato converge per confronto classico}$$

NO!!! Il confronto classico si può usare solo per integrande ≥ 0 e $\sin(x^2)$ non ha un segno fisso quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\frac{|\sin(x^2)|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{per ogni } x > 0. \text{ Allora}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^3} dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx \text{ conv.}$$

↑
tabellina
↑
confronto classico tra integrande ≥ 0
↑
Assoluta integrabilità

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$$

Ora l'integrandola ha segno ≥ 0 vicino al problema, anzi in tutto l'intervallo. Quindi uso i criteri per integrande positive, cioè il conf. asint. con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^3} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale dato si comporta come l'int. di $\frac{1}{x}$ con problema in 0, quindi diverge.

Conclusione: l'integrale iniziale diverge.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\log(3+x^2)}{3+x^2} dx$

Integrandola $f(x) \geq 0$
Unico problema a $+\infty$.

Brutale: $f(x) \sim \frac{\log x^2}{x^2} \sim \frac{2 \log x}{x^2}$

Ora x^2 è buono per convergenza, $\log x$ "torna contro", ma non riesce a contrastare x^2

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in (1, 2)$, ad esempio $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(3+x^2)}{3+x^2} \cdot x\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log[x^2(1+\frac{3}{x^2})]}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} \cdot x\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2 \log x + \log(1+\frac{3}{x^2})}{1+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} + \frac{\log(1+\frac{3}{x^2})}{\sqrt{x}(1+\frac{3}{x^2})}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 $\downarrow$ 1 $\downarrow$ $+\infty$
 potente vs logaritmi

= 0 caso limite

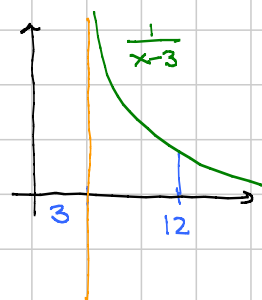
[quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al problema, cioè per x sufficientemente grandi, quindi $f(x) \leq g(x)$ per x grandi, quindi]

L'integrale dato si comporta come $\int \frac{1}{x^{3/2}} dx$ con problema a $+\infty$, cioè converge.

— 0 — 0 —

Cosa succede se il problema è in $x_0 \neq 0$.

Esempio 6 $\int_3^{12} \frac{1}{x-3} dx$ problema in $x_0 = 3$



Idea: riportare il problema in 0 mediante un cambio di variabili

Pongo $y = x-3$, quindi $dy = dx$. Cambio gli estremi
quando $x=3$ ho che $y=0$, quando $x=12$ ho che $y=9$

Quindi $\int_3^{12} \frac{1}{x-3} dx = \int_0^9 \frac{1}{y} dy$, quindi diverge

Oss. La formula di integrazione per sostituzione vale solo sugli integrali propri...

Tuttavia si può estendere a quelli impropri usando la definizione e facendo la sostituzione u fisso.

Fatto generale

$$\int_{x_0}^{x_0+a} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{array}$$

$a > 0$

$$\int_{x_0-a}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{array}$$

$a > 0$

→ Tabellina.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 086

Titolo nota

25/11/2011

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx$

Problemi in $x = +\infty$ e anche in $x = 1$.
Per il resto integranda $f(x) \geq 0$.

$$\int_1^{+\infty} = \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$

Per l'integrale in $[3, +\infty)$ osserviamo che $\frac{1}{x^2 \log x} \leq \frac{1}{x^2 \log 3}$
denominatore + piccolo

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx < +\infty$$

Per l'integrale in $[1, 3]$ riporto il problema in 0:

pongo $y = x - 1$, da cui $dy = dx$. Quando $x = 1$ ho che $y = 0$
" $x = 3$ " " $y = 2$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2 \log x} dx = \int_0^2 \frac{1}{(y+1)^2 \log(1+y)} dy$$

In $y = 0$ l'integrale è improprio per colpa di $\log(1+y) \sim y$, quindi

Brutale: $f(y) = \frac{1}{(y+1)^2 \log(1+y)} \sim \frac{1}{1 \cdot y}$

Quindi facciamo il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{y}$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(y+1)^2 \log(1+y)}}{\frac{1}{y}} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale diverge.

$$\int_1^{+\infty} = \underbrace{\int_1^3}_{+\infty} + \underbrace{\int_3^{+\infty}}_{\text{converge}} = +\infty$$

Metodo alternativo per l'integrale in $[1, 3]$. Confronto $f(x) = \frac{1}{x^2 \log x}$ con $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2 \log x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{(y+1)^2 \log(1+y)} = 1 \neq 0 \neq \pm\infty$$

$\uparrow$ p.to in cui c'è il problema $\uparrow$ $y = x-1$

Quindi l'integrale di $\frac{1}{x^2 \log x}$ con problema in 1 si comporta come l'int. di $\frac{1}{x-1}$ con problema in 1, quindi diverge.

Esempio 2 $\int_0^1 \frac{1}{\log x} dx$ C'è il problema in 1 perché $f(x)$ non è limitata. Quando $x \rightarrow 0^+$ abbiamo che $f(x) \rightarrow 0^-$, quindi $f(x)$ è limitata vicino a 0, quindi in $x=0$ non ci sono problemi

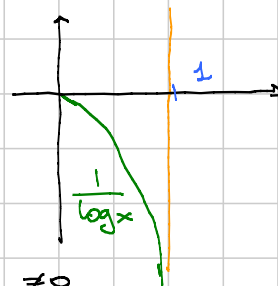
L'unico problema è in $x=1$.

Inoltre $f(x) \leq 0$ nell'intervallo, quindi posso usare i criteri per integrande a segno cost.

Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\log x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\log(1+y)} = 1 \neq 0 \neq \pm\infty$$

$\uparrow$ $y = x-1$



Quindi si comporta come $\int \frac{1}{x-1} dx$ con problema in 1, quindi diverge a $-\infty$.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ si può fare usando la definizione ($\alpha > 0$)

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha}$$

$\downarrow$ 0

quindi converge per ogni $\alpha > 0$.

$$\text{Conseguenza: } \int_0^{+\infty} 2^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\log_2 \cdot x} dx = \frac{1}{\log_2}, \text{ quindi converge}$$

(posso sostituire 2 con un qualunque reale > 1)

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ Confronto asintotico con $g(x) = e^{-x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2} = [e^{-\infty}] = 0$$

Caso limite: per x grandi $\frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} \leq 1$, cioè $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, quindi

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge e dunque anche $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} x^{20} e^{-x} dx$ Brutale: e^{-x} farebbe convergere, x^{20} nulla contro, una probabilità più poco contro l'esponenziale.

Se faccio il confronto asintotico con e^{-x} va male (provare!). Provo allora con $g(x) = e^{-x/2}$ oppure $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Calcolo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{22} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{22}}{e^x} = 0 \text{ caso limite}$$

Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x grandi, cioè $f(x) \leq g(x)$, quindi converge.

Esempio 6 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$ Problemi in $x=1$ e $x=+\infty$.

Problema a $+\infty$ Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ quindi converge

Problema in 1 Brutale: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}}$

quindi $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, quindi converge

COLPEVOLE DELL'IMPROPRIETÀ

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}} \cdot \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ con problema in $x=1$, dunque converge.

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^7+7x^2+1} dx$ converge perché $f(x) \sim \frac{1}{x^5}$

Esempio 8 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^7+7x^2-1} dx$ Ora il denominatore si annulla almeno una volta in $[0, +\infty)$
 Infatti in $x=0$ ho denom. $= -1$
 per $x \rightarrow +\infty$ ho denom. $\rightarrow +\infty$

Quante volte si annulla? Denominatore' $= 7x^6 + 14x > 0$ per $x > 0$
 quindi il denominatore è strett. crescente, quindi si annulla in un unico valore $\alpha > 0$ che non riesco a trovare...

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\alpha+3} + \int_{\alpha+3}^{+\infty}$$

converge per confronto asint. con $\frac{1}{x^5}$

Per l'integrale in $[\alpha, \alpha+3]$ uso il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x-\alpha}$
 Devo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{(x^2+1)}{x^7+7x^2-1} (x-\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{(x^2+1)(x-\alpha)}{x^7+7x^2-1}$$

$$\left[\frac{0}{0} : \text{H\^op} \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\text{numa}}{7x^6+14x} = \frac{\text{numa}}{7\alpha^6+14\alpha} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi si comporta come $\int \frac{1}{x-\alpha} dx$ con problema in α .

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 087

Titolo nota

26/11/2011

Trucco dell'integrazione per ponti

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ Due problemi: a 0 e a $+\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ Integranda ha segno variabile, quindi studio $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

Poichè $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ per ogni $x \geq 1$, abbiamo che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$\uparrow$
confronto classico
tra integrande ≥ 0
 $\uparrow$
Assoluta
integrabilità

Oss. Stesso discorso se cambio x^2 con x^α purchè $\alpha > 1$.

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ integranda ≥ 0 nella zona $x \in [0, 1]$ Brutale: $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$
quindi diverge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ L'unico problema è a $+\infty$ perchè in 0 la funzione tende ad 1, quindi è limitata in un intorno di 0. Volendo

$\sin x \leq x$ per ogni $x > 0$, quindi $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ per ogni $x > 0$

L'integranda è a segno variabile, quindi puoi provare con l'assoluta int.

$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$, poi dico che $\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$, ma $\int \frac{1}{x} dx$ con problema a $+\infty$ diverge, quindi BOH.

Vedremo successivamente che $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$, quindi ancora BOH.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{NUMERO}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{Basta studiare il 2°}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &\stackrel{\text{definizione}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \sin x \cdot \frac{1}{x} dx = \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[-\cos x \cdot \frac{1}{x} \right]}_{G \cdot F} \Big|_1^A - \int_1^A \underbrace{(-\cos x)}_G \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}_F dx \right\} \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{-\cos A}{A}}_0 + \underbrace{\frac{\cos 1}{1}}_{\frac{\cos 1}{1}} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\} = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx
 \end{aligned}$$

Ho ancora un integrale improprio, ma ho x^2 al denominatore. Quindi come nell'esempio 1:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ converge}$$

$\uparrow$ $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ + confronto classico $\uparrow$ Assoluta integrabilità

Conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{converge}} = \text{Numero.}$$

Nota bene Vedremo che $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$, ma $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge

— o — o —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

L'integranda è limitata, quindi l'unico problema è a $+\infty$. L'integranda ha segno variabile.

Vedremo più avanti che

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty, \text{ quindi BOH sul precedente}$$

Come prima abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \underbrace{\int_0^1 \cos(x^2) dx}_{\text{Numero}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx}_{\text{studio solo questo}}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{x \cos(x^2)}_g dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_F \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_G \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_F \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x^2)}_G dx \right\} \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin(A^2)}{2A}}_{\downarrow 0} - \frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \right\}
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Come prima $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} dx$ converge (per $\frac{1}{x^2}$ sotto), quindi

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ converge (assoluta integrabilità), quindi l'integrale di partenza converge.

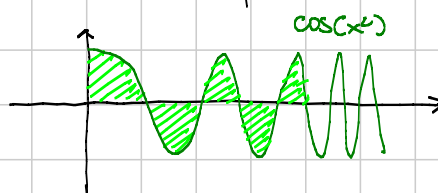
Oss. Con lo stesso metodo si dimostra che $\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha) dx$ e $\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx$ convergono per ogni $\alpha > 1$

(Esercizio: dimostrarlo moltiplicando e dividendo per $x^{\alpha-1}$)

Oss. La funzione $\cos(x^2)$ è oscillante e non tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$

Questo dice che per gli integrali impropri non vale l'analogo della condizione necessaria per le serie, cioè

può accadere che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converga, ma $f(x) \not\rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ (può accadere che $f(x)$ non ha limite)



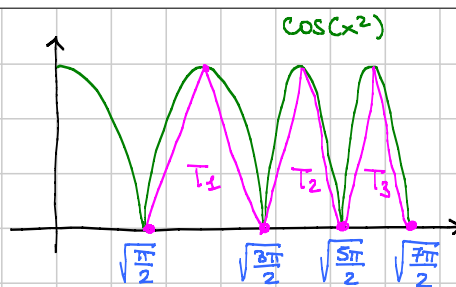
Oss. Quando vedremo che $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$ avremo che

- la somma di tutte le aree con il segno + diverge
- la somma delle aree a segno alterno converge

Dimostrazione che $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx \geq \text{somma aree triangolini}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$



Ogni T_n ha altezza 1. Chi è la base? Bisogna trovare i pti dove $\cos(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}$

Il triangolo T_n ha come base il segmento $\left[\sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}, \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right]$

Quindi il triangolo T_n ha la base lunga $\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}$, quindi

$$\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \right), \text{ quindi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \right)}_{a_n}$$

$$\text{Brutale: } \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} + \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}}{\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} + \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}} = \frac{\frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{(2n-1)\pi}{2}}{\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} + \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

Quindi poiché $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, la serie diverge (rigoroso: C.A. con $\frac{1}{\sqrt{n}}$)

Ma allora $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx \geq \text{serie aree} = +\infty$, quindi diverge.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 088

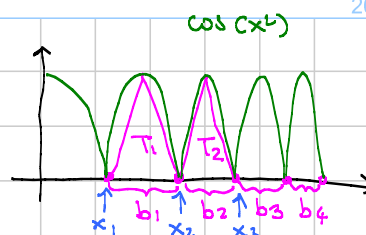
Titolo nota

26/11/2011

Back to $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Base}(T_n)$$

$\uparrow$
altezza=1



La serie $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ diverge perché copre tutta la semiretta dal primo p.to $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ a $+\infty$.

Metodo alternativo: indichiamo con $x_1, x_2, x_3, \dots$ i p.ti dove $\cos(x^2) = 0$. Allora $\text{Base}(T_n) = x_{n+1} - x_n$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Base}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = (\cancel{x_2} - x_1) + (\cancel{x_3} - \cancel{x_2}) + (\cancel{x_4} - \cancel{x_3}) + \dots$$

(Si tratta di una serie telescopica per cui $S_n = \text{somma parziale} = x_{n+1} - x_1 \rightarrow +\infty$).

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$

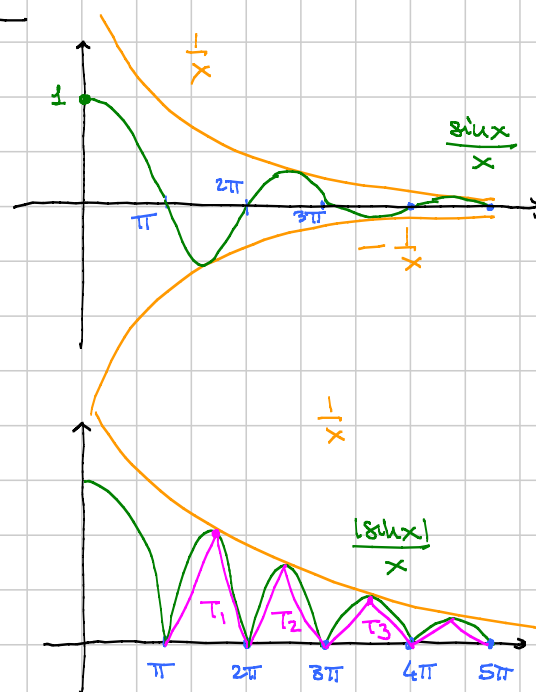
$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ con } k \geq 1$$

Come prima

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \text{somma aree "colline"}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

Ora tutte le basi sono π

Le altezze sono il valore della funzione nel p.to medio della base

La base di T_n ha come estremi $n\pi$ e $(n+1)\pi$, quindi il p.to medio della base di T_n è $n\pi + \frac{\pi}{2}$, quindi il valore della funzione è

$$\frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2n\pi + \pi} = \text{altezza di } T_n$$

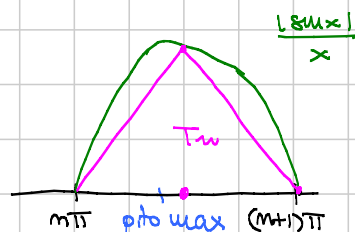
quindi

$$\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \text{base}(T_n) \cdot \text{altezza}(T_n) = \frac{1}{2} \pi \frac{2}{2n\pi + \pi} = \frac{\pi}{2n\pi + \pi}$$

$$\text{Quindi } \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n\pi + \pi} = +\infty$$

↓
termine generale $\sim \frac{1}{n}$

Oss. Il p.to centrale della base è il p.to di max della funzione in quell'intervallo?
Assolutamente NO!



$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}$. Quindi nel centro della base abbiamo che $\cos x = 0$, $\sin x = \pm 1$, quindi di sicuro non è il p.to di max.

Il p.to di max viene un po' prima del centro (a parità di valore di $\sin x$, conviene dividere per un x più piccolo).

Oss. Per il metodo dei triangolini è fondamentale solo sapere che la funzione sta sopra il triangolo nella zona in questione. Questo nei 2 esempi precedenti non è stato dimostrato...
Poteva succedere una cosa del genere



METODO DEI TRIANGOLINI: le serie aiutano gli integrali

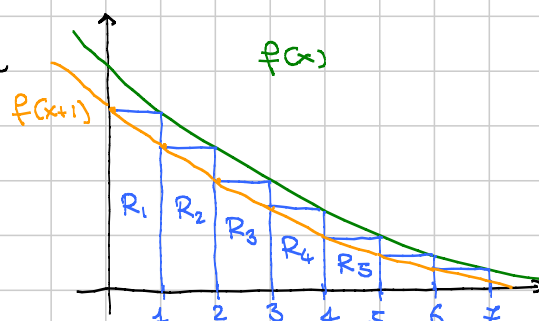
CONFRONTO SERIE - INTEGRALI gli integrali aiutano le serie.

Prendiamo $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$
- f è debolmente decrescente

Come prima

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$



$$\text{Area}(R_n) = \text{base} \cdot \text{altezza} = 1 \cdot f(n)$$

Analogamente

$$\int_0^{+\infty} f(x+1) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Ora

$$\int_0^{+\infty} f(x+1) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Questo si vede: $\rightarrow$ o con il cambio di variabili $y = x+1$

$\rightarrow$ o osservando che prendendo l'area che rappresenta il 1° integrale e traslandola a dx di 1 si ottiene l'area che rappresenta il 2° integrale.

Abbiamo così dimostrato che

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Confronto serie - integrali

area sotto $f(x+1)$

area triangoli

area sotto $f(x)$

Analogamente se $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $M \in \mathbb{N}$ ho che

$$\int_{M+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx$$

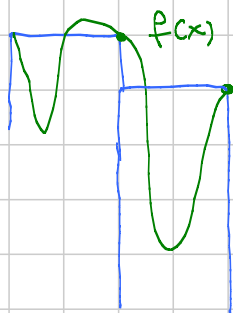
Questo permette di dedurre il comportamento della serie da quello dell'integrale improprio, cioè

- se l'integrale improprio di $f(x)$ con problema a $+\infty$ converge, allora la serie di $f(n)$ converge (uso disuguaglianza di dx)
- se l'integrale improprio di $f(x)$ con problema a $+\infty$ diverge, allora la serie di $f(n)$ diverge (uso disuguaglianza di dx).

Esempio classico Le serie armoniche generalizzate si comportano come i rispettivi integrali impropri.
Gli integrali si sanno studiare, quindi anche le serie.

Oss. Dove ho usato che $f(x)$ è debolmente decrescente?

Nel dire che i rettangoli stanno sotto $f(x)$ e sopra $f(x+1)$, cioè questo non succede



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 089

Titolo nota

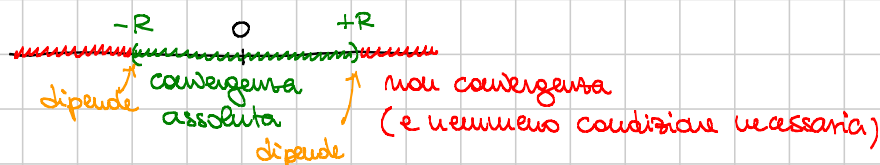
26/11/2011

Metodi per il calcolo della somma di serie di potenze

Serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
 $\uparrow$
 coefficienti

Domande: 1 - per quali valori di x converge?
 2 - quanto fa la somma?

Teo (raggio di conv.) Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ t.c.



Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$, allora $R = \frac{1}{L}$ (se il limite non esiste, R esiste comunque, ma non è dato dalla formula)

Teo (serie di Taylor) Se la serie di potenze è la serie di Taylor di una certa funzione $f(x)$ ottenuta dalle funzioni elementari facendo op. algebriche e o composizioni in zone fuori dai problemi burocratici, cioè la serie è della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

allora la serie, per i valori di x per cui converge, ha per somma proprio $f(x)$.

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
 (è la serie di Taylor di e^x e ha $R = +\infty$)

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)}$ per ogni $x \in (-1, 1)$

(è una serie geometrica, oppure la serie di Taylor di $(1-x)^{-1}$)

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = -\log(1-x)$
per ogni $x \in [-1, 1)$

Questo dimostrava che $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = -\log 2$.

Teorema Sia $f(x)$ la somma di una serie di potenze, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{definita per ogni } x \in (-R, R),$$

più eventualmente in $x = \pm R$

Allora "la derivata della serie è la serie delle derivate", cioè

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

↑
per $n=0$ il coeff. sarebbe 0.

Oss. L'uguaglianza vale per ogni $x \in (-R, R)$. In particolare

- la serie di potenze e la serie delle derivate hanno lo stesso raggio di convergenza
- il comportamento negli estremi può essere diverso per le due serie.

Oss. In generale è falso che la derivata di una serie, cioè della somma di infinite funzioni, è la somma delle infinite derivate.

È vero però per le serie di potenze.

Esempio 1 La serie dell'esempio 2 è la derivata termine a termine della serie dell'esempio 3. Così la somma dell'es. 2 è la derivata della somma dell'esempio 3.

Esempio 2 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Cambio x con $-x$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

Cambio x con x^2 : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

Se ora faccio la primitiva a dx e so x:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Utilizzo del teorema di derivazione

① Ho la serie $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ e non so calcolare la somma

② Calcolo la derivata e viene $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ e di questa so che la somma è $\frac{1}{1+x^2}$

③ Allora la serie iniziale era una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$, cioè $\arctan x + c$.
Poiché la serie iniziale faceva 0 per $x=0$ deve essere $c=0$.
— 0 — 0 —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$
 $= x (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots)$

(teo. scambio con deriv.)

$$= x (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

$$= x (-1 + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

serie esempio 2: so calcolare la somma

$$= x \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)'$$

$$= x \left(\frac{-1+x+1}{1-x} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ora so che $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}$ per ogni x per cui converge
 $x \in (-1, 1)$

In maniera formale

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \\ &\quad \uparrow \text{Teo. scambio} \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \text{semplici calcoli.} \\ &\quad \uparrow \text{aggiungo e tolgo} \quad \uparrow \text{calcolo somma di serie nota} \\ &\quad \text{termini con } n=0 \end{aligned}$$

Esempio 2 Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{7^n}$. La serie converge

Inoltre è il caso $x = \frac{1}{7}$ della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (n x^n)' \\ &\quad \uparrow \text{partire da } 0 \text{ o } 1 \text{ non cambia} \\ &= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)' = x \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' \\ &\quad \text{serie dell'esempio 1} \end{aligned}$$

Basta ora calcolare la derivata ed il raggio di convergenza per stabilire per quali x vale l'uguaglianza.

Esempio 3 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n-2} x^n$

$$\frac{n^2}{n-2} = \frac{n^2 - 2n + 2n - 4 + 4}{n-2} = n + 2 + \frac{4}{n-2}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n-2} x^n &= \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n x^n}_{\text{OK}} + 2 \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} x^n}_{\text{OK}} + 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{4} \\ &= x^2 \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right) \\ &\quad \text{OK} \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 090

Titolo nota

30/11/2011

Equazioni differenziali

Risolvere un'eq. diff. vuol dire trovare una funzione $u(t)$ che soddisfa una certa relazione che coinvolge un po' di sue derivate.

Esempi 1 $\cos u(t) + \sin u'(t) = t^2 + 8$

2 $u'(t) = [u(t)]^2 \rightarrow$ cercare tutte le funzioni $u(t)$ la cui derivata è uguale al quadrato della funzione stessa

3 $u''(t) + u'(t) = t^2$

Si dice ORDINE di un'eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare nell'eq. stessa. Negli esempi gli ordini sono: 1, 1, 2

Un'eq. diff. si dice in FORMA NORMALE se la derivata di ordine massimo "è stata ricavata rispetto al verbo". Un'eq. diff. di ordine k in forma normale si presenta dunque nella forma

$$u^{(k)}(t) = \Phi(u^{(k-1)}(t), \dots, u'(t), u(t), t)$$

L'esempio 2 precedente era in forma normale.

L'esempio 3 precedente non era in forma normale, ma era facilmente riconducibile ricavando

$$u''(t) = -u'(t) + t^2$$

L'esempio 1 precedente non era in forma normale, e non è possibile in generale portarlo (bisognerebbe fare arcsin, ma questo senza ipotesi non si può).

NOTAZIONE RAPIDA = non scrivere le t che sono argomento di u e delle sue derivate.

In notazione rapida gli esempi diventano

$$\cos u + \sin u' = t^2 + 8$$

$$u' = u^2$$

$$u'' + u' = t^2$$

Un'eq. diff. di ordine k in forma normale si scrive in notazione rapida come

$$u^{(k)} = \Phi(u^{(k-1)}, \dots, u', u, t)$$

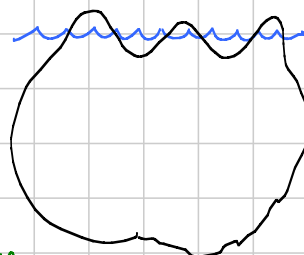
Un'eq. diff. si dice AUTONOMA se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate. In notazione rapida vuol dire che la t non c'è proprio.

Negli esempi precedenti: [2] è autonoma, [1] e [3] no.

Un'equazione differenziale del 1° ordine si dice a VARIABILI SEPARABILI se è in forma normale e si scrive nella forma (not. rapida)

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

Eq. diff. primo ordine
a VARIABILI SEPARABILI



cioè se il termine a destra è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u .

Esempi

$$u' = t^2 \cdot \cos u$$

variabili separabili

$$u' + tu = t$$

La posso scrivere come

$$u' = -tu + t = t(1-u) \quad \text{e così è a variabili separabili}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(t) \quad g(u)$

$$u' = u^3$$

è a variabili separabili

$$u' = 1 \cdot u^3$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f(t) \quad g(u)$

Fatto generale. Tutte le eq. diff. del 1° ordine AUTONOME in forma normale sono in realtà a variabili separabili.

Un'eq. diff. di qualunque ordine si dice LINEARE se "la u e le sue derivate compaiono di 1° grado e non all'interno di funzioni".
 Un'eq. diff. lineare di ordine k si presenta nella forma

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

Le funzioni $a_k(t), a_{k-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ sono funzioni della sola variabile t , dette COEFFICIENTI dell'equazione, $f(t)$ è una funzione della sola variabile t detta termine noto (o secondo membro, o termine forzante).

Il primo membro è una COMBINAZIONE LINEARE di u e di tutte le sue derivate fino alla k -esima, con coefficienti dipendenti da t .

Un'eq. diff. lineare si dice OMOGENEA se $f(t) = 0$, e si dice NON OMOGENEA se $f(t) \neq 0$.

Un'eq. diff. lineare si dice A COEFFICIENTI COSTANTI se i coefficienti sono dei numeri e non delle funzioni della t .

- Achtung! ① Coefficienti costanti $\Rightarrow$ autonoma? No, perché può esserci $f(t)$ che dipende da t .
 ② Autonoma e lineare $\Rightarrow$ coeff. costanti? Ovviamente sì.
 ③ Autonoma $\Rightarrow$ omogenea? No, perché $f(t)$ potrebbe essere un numero $\neq 0$, ad esempio

$$u'' + 3u' + 2u = 5$$

$\uparrow f(t) \neq 0$ che la rende non omog.

Esempi

$$u' + t^2 u = 0 \quad \text{LINEARE (comb. lin. di } u' \text{ e } u \text{ con coeff. } 1 \text{ e } t^2)$$

$$u' + t u^2 = 0 \quad \text{NON LINEARE per colpa del quadrato}$$

$$u' + \cos(tu) = 0 \quad \text{NON LINEARE per colpa del cos}$$

$$\cos t^2 \cdot u + e^t u' = \arctan t \quad \text{LINEARE}$$

Equazioni lineari del 1° ordine: $a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t)$

A meno di dividere per $a_1(t)$ (il che può richiedere che sia $\neq 0$) l'equazione si può scrivere nella forma

$$u' + a(t)u = b(t)$$

1° ordine
lineare

Equazioni lineari di ordine qualunque a coeff. costanti, omogenee o non omogenee. In generale si scrivono nella forma

$$a_k u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

ordine k lineare
a coeff. costanti

dove $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ sono numeri dati.

Esempi

$$u'' + 3u = \sin t \quad \text{ordine 2 lineare a coeff. costanti}$$

$$u' = t^2 u + \sin t \quad \text{ordine 1 lineare a coeff. non costanti}$$

$$u' = \pi u \rightarrow \text{variabili separabili (autonoma)}$$

$\rightarrow$ 1° ordine lineare

$\rightarrow$ a coeff. costanti

quindi rientra in tutte e 3 le tipologie evidenziate.

Achtung! Quando si risolve un'eq. differenziale, si intende che tra le incognite c'è anche l'insieme di partenza della $u(t)$ (si intende che l'ansio è $\mathbb{R}$).

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 091

Titolo nota

30/11/2011

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$ Nota bene: $u(t) = e^t + 3$ NON è una soluzione, infatti $u'(t) = e^t$ che NON è uguale ad $u(t)$.Un'altra soluzione è $u(t) = 3e^t$. Infatti $u'(t) = 3e^t = u(t)$ Osservazione: $u(t) = ce^t$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, produce infinite soluzioni dell'eq. diff., dipendenti da un parametro.Esempio 2 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$ Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$ Invece $u(t) = \frac{3}{t}$ non è una soluzione in quanto

$$u'(t) = -\frac{3}{t^2} \quad \text{e} \quad -[u(t)]^2 = -\frac{9}{t^2} \quad \text{e non sono uguali.}$$

Un'altra soluzione è $u(t) = \frac{1}{t+3}$ (fare verifica!) $u(t) = \frac{1}{t+c}$ è una famiglia di infinite soluzioni, dipendenti da un parametro $c \in \mathbb{R}$.Oss. Soluzioni diverse in questo esempio hanno insieme di definizione diverso, cioè insiemi diversi dei t per i quali la relazione scritta nell'equazione è soddisfatta.Esempio 3 $u'' = -u$ Una soluzione è $u(t) = \sin t$ Infinite soluzioni sono date da $u(t) = c \sin t$ Altre infinite soluzioni sono date da $u(t) = c \cos t$

Più in generale, si verifica (farlo!) che tutte le funzioni del tipo

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

sono soluzioni dell'equazione (c_1 e c_2 sono parametri reali).

Fatto generale "Di solito" l'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. è un insieme infinito dipendente da un numero di parametri reali uguale all'ordine dell'equazione.

A seconda dei casi, il parametro (o i parametri) possono comparire nei posti più disparati.

Soluzione generale di un'eq. diff. = formula che fornisce le infinite soluzioni con il numero opportuno di parametri.

Negli esempi: $u(t) = ce^t$, $u(t) = \frac{1}{t+c}$, $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

PROBLEMA DI CAUCHY Equazione differenziale + condizioni iniziali

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 5 \end{cases}$ Risolverlo vuol dire cercare tra le infinite soluzioni quella che rispetta la condizione

→ La sol. generale è $u(t) = ce^t$

→ Determino c imponendo la condizione iniziale

$$5 = u(0) = c \cdot e^0 = c \quad \text{da cui } c = 5.$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque $u(t) = 5e^t$
(Verificare sempre che risolva l'eq. e rispetti le cond. iniziali)

Esempio 2 $\begin{cases} u' = -u^2 \\ u(5) = 7 \end{cases}$

La soluzione generale è $u(t) = \frac{1}{t+c}$. Impongo la cond. iniziale

$$7 = u(5) = \frac{1}{5+c}, \quad \text{quindi } 5+c = \frac{1}{7}, \quad c = \frac{1}{7} - 5 = -\frac{34}{7}$$

Quindi la sol. del problema di Cauchy è

$$u(t) = \frac{1}{t - \frac{34}{7}} = \frac{7}{7t - 34} \quad (\text{Verificare equazione e condizione iniziale})$$

Come devono essere fatte le condizioni iniziali in un problema di Cauchy?

→ Devono essere tante quante l'ordine dell'equazione (il quale coincide con il numero dei parametri da determinare)

→ Se la condizione è una sola, allora è del tipo $u(t_0) = u_0$, con t_0 e u_0 assegnati.

Se la condizione è più di una, allora le condizioni devono prescrivere il valore di $u, u', u'', \dots, u^{(k-1)}$ in uno stesso p.to to

Esempi

$$\begin{cases} u'' + 3u' = u^2 + t^2 \\ u(5) = 7 \\ u'(5) = 22 \end{cases} \quad \text{ok} \quad \begin{cases} u(5) = 7 \\ u'(8) = 7 \end{cases} \quad \text{NO} \quad \begin{cases} u(5) = 7 \\ u''(5) = 8 \end{cases} \quad \text{NO devo per forza fare } u \text{ e } u'$$

In generale per un'eq. di ordine 2 le condizioni iniziali sono

$$u(t_0) = u_0$$

$$u'(t_0) = u_1$$

Per un'eq. di ordine 3 le condizioni iniziali sono del tipo

$$u(t_0) = u_0$$

u

$$u'(t_0) = u_1$$

u'

$$u''(t_0) = u_2$$

u''

Fatto generale "Di solito" un'eq. diff. ha infinite soluzioni, e le condizioni iniziali di un problema di Cauchy permettono di determinare in maniera univoca i valori dei parametri, quindi la soluzione del problema.

TEOREMA DI ESISTENZA Consideriamo il problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine k in forma normale, cioè

$$u^{(k)} = \Phi(u^{(k-1)}, u^{(k-2)}, \dots, u', u, t)$$

Se Φ è continua, allora esiste almeno una soluzione.

TEOREMA DI UNICITÀ Stesse ipotesi del teorema precedente.

Supponiamo inoltre che Φ sia un po' meglio (diciamo derivabile rispetto alle varie variabili),

Allora la soluzione del problema di Cauchy è unica.

Esempio (di non unicità) Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{Funzione continua, ma non derivabile in } u=0 \text{ (e nemmeno Lipschitziana vicino a } 0)$$

La funzione $u(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema, cioè risolve l'eq. e verifica la condizione iniziale.

La funzione $u(t) = t^3$ è un'altra soluzione. Verifica $u(0) = 0$ e
 $u'(t) = 3t^2 = 3[u(t)]^{2/3}$

In questo caso il problema ha infinite sol. che rispettano la condizione iniziale (colpa della non Lipschitzianità di $|u|^{2/3}$).

In realtà ne ha pure infinite...

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 092

Titolo nota

01/12/2011

Eq. diff. a variabili separabili

$$u' = f(t)g(u)$$

- ① Separare
- ② Integrare
- ③ Ricavare

Obiettivo: trovare la formula per la soluzione generale (con il parametro c)

Esempio 1 $u' = \boxed{t^3} \boxed{u^2}$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $f(t)$ $g(u)$

- ① Separare: tutte le u a sx, tutte le t a dx

$$\frac{du}{dt} = t^3 u^2 ; \quad \frac{du}{u^2} = t^3 dt \quad \frac{du}{dt} = f(t)g(u) ; \quad \frac{du}{g(u)} = f(t) dt$$

- ② Integrare: a sx rispetto ad u , a dx rispetto a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt ; \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + \boxed{c}$$

$\uparrow$
parametro libero

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f(t) dt + c$$

- ③ Ricavare u in funzione di t dalla formula ottenuta al passo prec.

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + c ; \quad -u = \frac{1}{\frac{1}{4} t^4 + c} ; \quad u = \frac{-1}{\frac{1}{4} t^4 + c} = \frac{-4}{t^4 + 4c} = \frac{-4}{t^4 + c}$$

Soluzioni generali dell'eq. diff. è

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 + c}$$

essendo $4c$ una costante qualunque, la posso chiamare c .

Oss. Questa procedura permette di trovare la soluzione generale di

un'eq. diff. a variabili separabili a patto di

- saper fare le primitive in fase ②;
- saper ricavare in fase ③.

Supponiamo ora di avere un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 t^3 & \text{eq. diff.} \\ u(0) = 5 & \text{cond. iniziale} \end{cases}$$

④ Determinare c (usando la cond. iniziale)

$$5 = u(0) = -\frac{4}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{4}{5}$$

↑
sostituisco $t=0$ nella
formula per la sol. gen.

Soluzione del problema di Cauchy:

$$u(t) = \frac{-4}{t^4 - \frac{4}{5}} = \frac{-20}{5t^4 - 4}$$

$$u(t) = \frac{-20}{5t^4 - 4}$$

Oss. Il fatto che il problema abbia una soluzione unica era prevedibile sulla base del teorema di esistenza ed unicità

⑤ Verificare (la condizione iniziale e l'equazione)

$$u(0) = \frac{-20}{-4} = 5 \quad \text{Ok.}$$

$$u'(t) = \frac{20}{(5t^4 - 4)^2} \cdot 20t^3 = \frac{20^2}{(5t^4 - 4)^2} \cdot t^3 = [u(t)]^2 \cdot t^3 \quad \text{Ok}$$

⑥ Studiare la soluzione (per quali t è definita, come si comporta)

$$u(t) = \frac{-20}{5t^4 - 4}$$

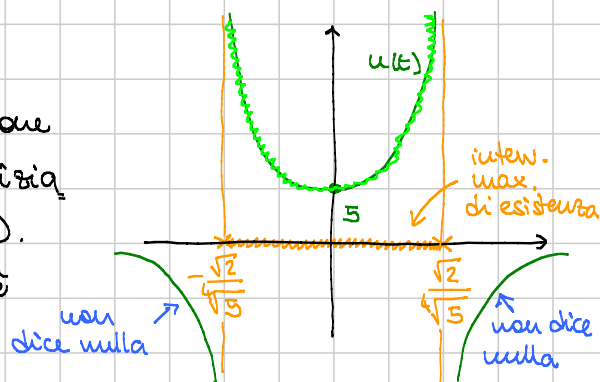
È definita dove denominatore $\neq 0$, cioè
 $5t^4 \neq 4$, cioè $t^4 \neq \frac{4}{5}$, cioè $t \neq \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$

Intervallo massimale di esistenza:

è il pezzo dell'insieme di definizione della $u(t)$ che contiene il tempo iniziale del problema di Cauchy ($t=0$).

Nell'esempio l'int. max. di esist. è

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{4}{5}}, \sqrt[4]{\frac{4}{5}}\right)$$



Tempo di vita (nel futuro): è l'estremo superiore dell'intervallo
 $\downarrow$ LIFE SPAN
 massimale di esistenza

Nell'esempio $T = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}$

Se $T = +\infty$, si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro

Se $T < +\infty$, si dice che la soluzione muore in T , e si va a vedere cosa succede in T . Ci sono 2 possibilità

* BLOW-UP (scoppio) se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty \quad (\text{è quello che succede nell'esempio})$$

* BREAK-DOWN (rottura) se non c'è blow-up, ma " $u(t)$ esce dalla zona in cui è definito il 2° membro dell'equazione".

Di solito, ma non per forza, questo si traduce nel fatto che

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty \quad (\text{i problemi ci sono su } u'(t))$$

Oss. Tutto questo studio è per tempi t successivi al tempo iniziale t_0 .

Definizioni analoghe valgono anche per t precedenti al tempo iniz.

Nel mondo reale: un'eq. diff. descrive l'evoluzione nel tempo di una certa quantità $u(t)$.

In questo contesto

- l'intervallo massimale di esistenza è il più grande insieme di tempi in cui è attendibile l'esito del modello
- il blow-up o break-down descrive cosa accade all'istante finale

— o — o —

Variaute: se fosse stato $\begin{cases} u' = u^2 t^3 \\ u(0) = -5 \end{cases}$

La sol. generale era, come prima, $u(t) = \frac{-4}{t^4 + C}$

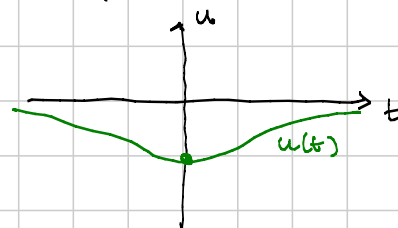
④ Determinare c $-5 = -\frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{5}$

Sol. pb. Cauchy: $u(t) = \frac{-4}{t^4 + \frac{4}{5}} = \frac{-20}{5t^4 + 4}$

⑤ Verifica: Farla!

⑥ Non ci sono problemi di denominatore, quindi l'int. max. di esistenza è tutto $\mathbb{R}$, dunque c'è esistenza globale nel passato e nel futuro ($T = +\infty$)

Oss. Per la stessa equazione diff.,
condizioni iniziali diverse conducono
a comportamenti completamente diversi.



Ultima variante: se fosse stato $u(0) = 0$

④ Determinare c: $0 = u(0) = -\frac{4}{c}$ Ops!!

In questo caso la soluzione (che deve esistere per forza per il te. di esistenza ed unicità) è la soluzione costante

$$u(t) \equiv 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

(Verifica banale!!). Ovviamente ha esistenza globale.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 093

Titolo nota

01/12/2011

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$

① Separare $\frac{du}{dt} = u^3 t^2$; $\frac{du}{u^3} = t^2 dt$

② Integrare $\int \frac{du}{u^3} = \int t^2 dt$; $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{1}{3} t^3 + c$

③ Ricavare $\frac{1}{u^2} = -\frac{2}{3} t^3 + c$ ← mettere c o -2c è la stessa cosa

$$u^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3} t^3 + c} = \frac{3}{-2t^3 + c}$$

Ora verrebbe

$$u(t) = \pm \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + c}}$$

Questa è la soluzione generale.

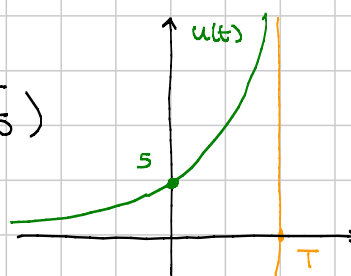
- ④ Determinare c Avendo come condizioni $u(0) = 5$, devo scegliere la soluzione generale con il segno + (una $\sqrt{\quad}$ è sempre ≥ 0).
Quindi compo

$$5 = u(0) = + \sqrt{\frac{3}{c}} \quad ; \quad 25 = \frac{3}{c} \Rightarrow c = \frac{3}{25}$$

Soluzione problema Cauchy: $u(t) = \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + \frac{3}{25}}} = \sqrt{\frac{75}{3 - 50t^3}}$ sol. par. Cauchy

- ⑤ Verificare Farlo !!! Sia la cond. iniz., sia l'equazione.

- ⑥ Studio della soluzione Definita per $3 - 50t^3 > 0$, $50t^3 < 3$,
quindi $t < \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$

Intervallo massimale di esistenza: $(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{50}})$ Tempo di vita: $T = \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$ 

$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$, quindi la soluzione ha blow-up per $T = \sqrt[3]{\frac{3}{50}}$

C'è invece esistenza globale nel passato.
— o — o —

Solita variante: se fosse stato $u(0) = 0$ avrei trovato in fase ④

$$0 = u(0) = \pm \sqrt{\frac{3}{c}} \text{ quindi impossibile}$$

In questo caso la soluzione (che per forza esiste ed è unica) è
 $u(t) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (ovviamente ha esistenza globale)
— o — o —

Altra variante: esercizio parametrico $\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Domanda: per quali valori di α l'equazione ha esistenza globale nel futuro?

④ Determinare c in funzione di α $\alpha = u(0) = \pm \sqrt{\frac{3}{c}}$

Farendo il quadrato

$$\alpha^2 = \frac{3}{c}, \text{ quindi } c = \frac{3}{\alpha^2}. \text{ Quindi la sol. del pb. di Cauchy è}$$

$$u(t) = \pm \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + \frac{3}{\alpha^2}}} = \boxed{\pm} \sqrt{\frac{3\alpha^2}{3 - 2\alpha^2 t^3}} = \alpha \sqrt{\frac{3}{3 - 2\alpha^2 t^3}}$$

↑
con il $\oplus$ se $\alpha > 0$
con il $\ominus$ se $\alpha < 0$

La soluzione ha sempre problemi quando denominatore $= 0$, cioè quando
 $2\alpha^2 t^3 = 3$, cioè $t = \sqrt[3]{\frac{3}{2\alpha^2}} > 0$, quindi non c'è mai esistenza globale nel futuro, tranne nel caso $\alpha = 0$ in cui la soluzione è quella costante
— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u \sin t \\ u(0) = -2 \end{cases}$ Oss.: L'eq. è a variabili separabili, ma anche lineare 1° ordine omogenea.

① Separare $\frac{du}{dt} = u \sin t$; $\frac{du}{u} = \sin t \, dt$

② Integrare $\int \frac{du}{u} = \int \sin t \, dt$; $\log |u| = -\cos t + c$

③ Ricavare $\log |u| = -\cos t + c$; $|u| = e^{-\cos t + c}$

$u(t) = \pm e^{-\cos t + c}$ (scelgo $\pm$ a seconda della cond. iniziale)
In realtà

$u(t) = \boxed{\pm e^c} \cdot e^{-\cos t} = c \cdot e^{-\cos t}$ con $c \in \mathbb{R}$ qualunque
 $\uparrow$
costante

Quindi la soluzione generale è $\boxed{u(t) = c \cdot e^{-\cos t}}$ verifica !!!

④ Determinare c. Se sono arrivato alla formula finale ho che

$-2 = u(0) = c \cdot e^{-1}$; $-2 = \frac{c}{e}$; $c = -2e$ da cui

$\boxed{u(t) = -2e e^{-\cos t}}$ Sol. pb. Cauchy

Se mi ero fermato alla formula $u(t) = \pm e^{-\cos t + c}$ ho che

$-2 = u(0) = \pm e^{-1+c}$. Scelgo il segno $\ominus$ e ritrovo

$-2 = -e^{-1+c}$; $2 = e^{-1+c}$; $-1+c = \log 2$; $c = 1 + \log 2$

Quindi sol. pb. Cauchy $u(t) = -e^{-\cos t + 1 + \log 2}$ che è la stessa cosa a meno di percorso.

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = 4 \end{cases}$

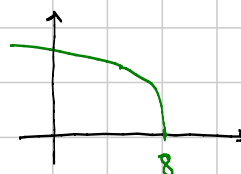
① Separare $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u}$; $u du = -dt$

② Integrare $\int u du = \int -dt$; $\frac{1}{2} u^2 = -t + c$

③ Ricavare $u^2 = -2t + c$ $u(t) = \pm \sqrt{c-2t}$ *soluzione generale*

④ Determinare c $4 = u(0) = \pm \sqrt{c} \Rightarrow c = 16$ e serve segno +

Sol. pbm. Cauchy : $u(t) = \sqrt{16-2t}$ (verifica)



⑤ Studiare u Definita per $16-2t \geq 0$, cioè $t \leq 8$.

Int. max. di esistenza : $(-\infty, 8]$, tempo di vita : $T = 8$.

$\lim_{t \rightarrow 8^-} u(t) = 0$ quindi non c'è BLOW-UP, ma BREAK-DOWN

Infatti $u \rightarrow 0$, cioè tende ad uscire dalla zona in cui è definito il 2° membro $\frac{1}{u}$ dell'equazione. In tal caso si ha pure che

$$\lim_{t \rightarrow 8^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow 8^-} \frac{-2}{2\sqrt{16-2t}} = \lim_{t \rightarrow 8^-} \frac{-1}{\sqrt{16-2t}} = -\infty$$

— 0 — 0 —

ha senso solo per $\alpha \neq 0$.

Variaute : se fosse stato $u(0) = \alpha$, per quali α c'è esistenza globale nel futuro (cioè $T = +\infty$)

④ $\alpha = u(0) = \pm \sqrt{c} \Rightarrow c = \alpha^2 \Rightarrow u(t) = \pm \sqrt{\alpha^2 - 2t}$
dipende dal segno di α

Questa ha sempre problemi per $t = \frac{\alpha^2}{2} > 0$, quindi non c'è mai esistenza globale nel futuro

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 094

Titolo nota

02/12/2011

NUMERI COMPLESSI

→ Forma cartesiana

→ Forma trigonometrica

→ Forma esponenziale

Forma cartesiana Un numero complesso è un oggetto della forma
 $a+bi$

dove a e b sono numeri reali, e i = unità immaginaria è tale
 che $i^2 = -1$.

Si indica con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Parte reale e immaginaria Se $z = a+bi$ è un numero complesso,
 allora a si dice parte reale e b si dice parte immaginaria.

In simboli

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

Rappresentazione geometrica Ad ogni numero complesso $z = a+bi \in \mathbb{C}$
 possiamo associare in maniera univoca il pto (a,b) di un piano,
 che in questo contesto prende il nome di PIANO DI GAUSS

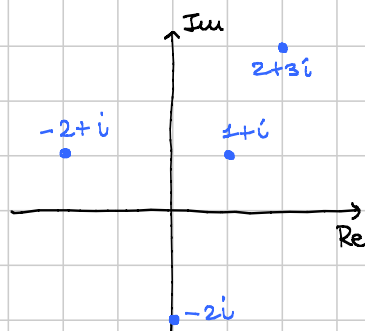
I numeri reali sono particolari numeri
 complessi, cioè quelli con parte immaginaria
 nulla: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Nel piano di Gauss corrisponderemo
 all' "asse x" che ora si chiama asse reale.

In simboli

$$\operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

I numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(z) = 0$ si dicono immaginari puri
 e nel piano di Gauss stanno sull'asse y (che ora è l'asse immaginario)



OPERAZIONI ALGEBRICHE

Somma e differenza Siano $z = a + bi$, $w = c + di$. Allora

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

In particolare

$$\operatorname{Re}(z \pm w) = \operatorname{Re}(z) \pm \operatorname{Re}(w), \quad \operatorname{Im}(z \pm w) = \operatorname{Im}(z) \pm \operatorname{Im}(w)$$

Prodotto Si fa usando la proprietà distributiva ed il fatto che $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bd \overset{-1}{i^2} \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

In particolare

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(w)$$

$$\operatorname{Im}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Re}(w)$$

Reciproco Sia $z = a + bi$. Voglio fare $\frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2 \overset{-1}{i^2}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \end{aligned}$$

L'inverso $\frac{1}{z}$ esiste purché $a^2 + b^2 \neq 0$, cioè sempre tranne nel caso in cui $a = b = 0$, cioè tranne nel caso in cui $z = 0$.

Divisione = moltiplicazione per il reciproco

$$\begin{aligned} \frac{w}{z} &= \frac{c + di}{a + bi} = \frac{c + di}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{ca - cbi + adi - bdi^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{(ca + bd)}{a^2 + b^2} + \frac{(ad - cb)}{a^2 + b^2} i = w \cdot \frac{1}{z} \\ &\quad \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right) \quad \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z}\right) \end{aligned}$$

Coniugato di un numero complesso. Se $z = a+bi$, si dice coniugato di z il numero complesso

$$\bar{z} = a-bi$$

Modulo di un numero complesso Si definisce modulo di z la quantità

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Oss. Il modulo di un numero complesso è un numero reale ≥ 0 .

$$\text{Inoltre } |z| = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=0 \Leftrightarrow z=0.$$

Interpretazioni geometriche

Il coniugato di z è il simmetrico di z rispetto all'asse reale.

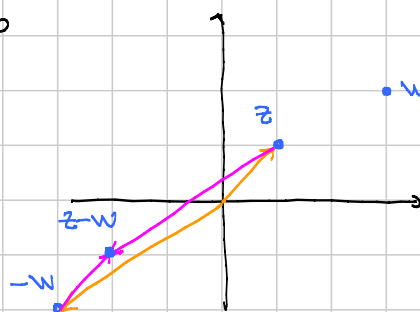
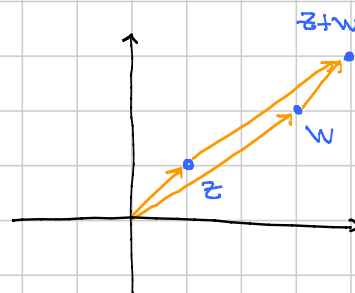
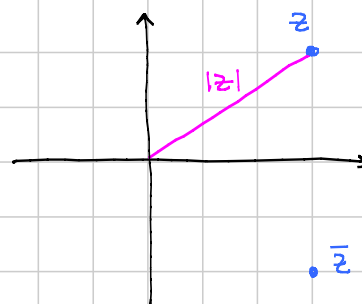
Il modulo di z è la distanza di z dall'origine.

La somma di 2 numeri complessi è "la regola del parallelogrammo" applicata ai vettori applicati nell'origine e con "la freccia" in z e w .

L'opposto $-z$ è il simmetrico di z rispetto all'origine.

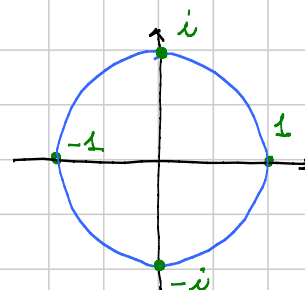
Fare $z-w$ vuol dire sommare $z+(-w)$

Il prodotto (per ora) non si capisce come agisce,



Esempi / Esercizi

① Descrivere l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z|=1$



② Proprietà del coniugato:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

Verifica nel caso del prodotto: $z = a+bi$, $w = c+di$

$$z \cdot w = (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i \quad (\text{fatto prima})$$

$$\overline{z \cdot w} = (ac-bd) - (ad+bc)i \quad \leftarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{z} \cdot \bar{w} &= (a-bi)(c-di) = ac - adi - bci + bd i^2 \\ &= (ac-bd) - (ad+bc)i \quad \leftarrow \end{aligned}$$

③ Reciproco, coniugato, modulo:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Dalla formula precedente si ottiene che, se $z \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Formula alternativa per $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Formula ottenuta in precedenza.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 095

Titolo nota

02/12/2011

Numeri complessi: forma trigonometrica

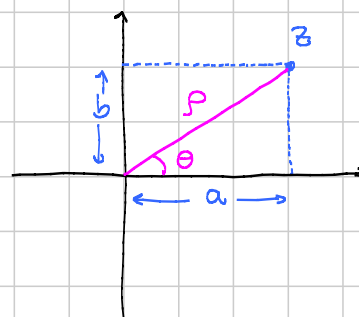
Per individuare un p.to z del piano di Gauss possiamo

→ assegnare le sue coordinate a e b
(forma cartesiana)

→ in alternativa, assegnare le sue coordinate polari ρ e θ , dove

ρ = distanza dall'origine

θ = angolo formato tra la congiungente d'origine con z ed il semiasse reale positivo.



Corretto dopo video

ρ e θ si dicono coordinate polari del p.to, mentre a e b si dicono coordinate cartesiane del p.to

In coordinate cartesiane, a e b possono essere reali qualunque e coordinate diverse individuano pti diversi.

In coordinate polari, $\rho \geq 0$ e θ è un angolo, cioè va pensato a meno di multipli di 2π . Inoltre c'è il problema del θ dell'origine che non è definito.

Formule di passaggio. Se conosco ρ e θ , allora

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

trigonometria nei triangoli rettangoli

Se conosco a e b , allora

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(teorema di Pitagora).

mentre per θ il consiglio è di guardare il disegno.

Achtung! Dividendo tra di loro le formule per b ed a si ottiene

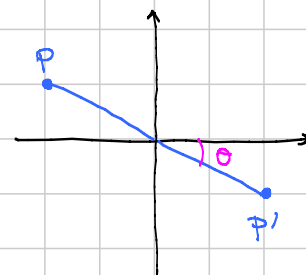
$$\frac{b}{a} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta \quad \text{da cui} \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

Formula peccidossissima! Intanto ci sono problemi quando $a=0$.

Poi essendoci $\arctan$ possono venire soltanto valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Quindi la formula funziona solo nel I e IV quadrante.

Nel II e III quadrante la formula fornisce il θ del p.to simmetrico rispetto all'origine, dunque sferato di π . Quindi nel II e III quadrante la formula giusta è



$$\theta = \arctan \frac{b}{a} + \pi$$

Formula trigonometrica $z = a + bi$

Uso le formule per a e b in funzione di ρ e θ e ottengo

$$z = \rho \cos \theta + (\rho \sin \theta)i = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Modulo e coniugato in forma trigonometrica: se $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, allora

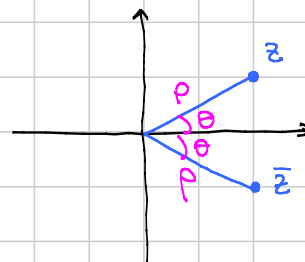
$$|z| = \rho$$

$$\bar{z} = \rho (\cos \theta - i \sin \theta) = \rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

Quindi il coniugato di z ha lo stesso ρ e θ cambiato di segno.

Argomento di un numero complesso

$$\text{Arg}(z) = \theta$$



Esempi

$$\text{Arg}(5) = 0$$

$$\text{Arg}(-5) = \pi$$

$$\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(4i) = \frac{\pi}{2}$$

← stessa cosa →

Prodotto in forma trigonometrica Prendiamo 2 numeri complessi

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho r (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= \rho r (\underbrace{\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi}_{\cos(\theta + \varphi)} + i \underbrace{\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi}_{\sin(\theta + \varphi)}) \end{aligned}$$

$$= \rho r (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

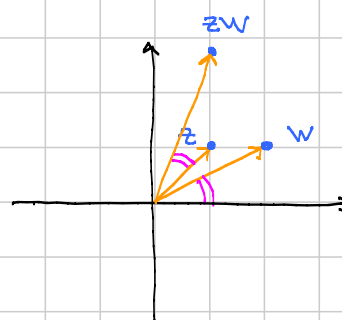
Quindi $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$$\text{Arg}(z \cdot w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$$

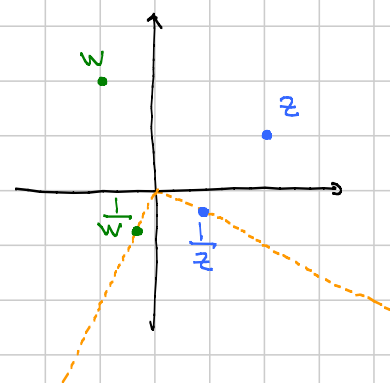
Quindi moltiplicare 2 numeri complessi vuol dire moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti.

Reciproco in forma trigonometrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$



Quindi fare il reciproco equivale a fare il reciproco di ρ e cambiare θ di segno



Divisione in forma trigonometrica

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$= \frac{\rho}{r} (\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi))$$

Dividere i moduli
Sottrarre gli argomenti

Forma esponenziale Gli ingredienti sono ancora ρ e θ , ma vengono presentati nella forma

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Applicando "bovinamente" le proprietà formali dell'esponenziale tornano tutte le formule per prodotto e quozienti.

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad w = r e^{i\varphi}$$

$$z \cdot w = \rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\varphi} = \rho r e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$$

↑
Formalmente: $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$

$$\frac{1}{z} = (z)^{-1} = (\rho e^{i\theta})^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)}$$

$$\frac{z}{w} = \rho e^{i\theta} \cdot (r e^{i\varphi})^{-1} = \frac{\rho}{r} e^{i\theta} \cdot e^{-i\varphi} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\varphi)}$$

Esempi di forma esponenziale

$$3 = 3 \cdot e^{i \cdot 0}$$

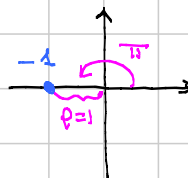
$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$$

$$2i = 2 e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$-3i = -3 e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$-3i = 3 e^{\frac{3\pi}{2} i}$$

$$= 3 e^{-\frac{\pi}{2} i}$$



NO!

Davanti all'esponenziale ci vuole ρ !!!

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 096

Titolo nota

02/12/2011

Potenza n-esima di un numero complesso Dati $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$,
calcolare z^n . Stessa cosa
con esponente $n \in \mathbb{Z}$

Questa operazione è comoda in forma trigonometrica (o esponenziale)

Se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, allora $z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

Stessa cosa in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$, quindi

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} \quad z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Dim. formale Induzione su n a partire dalla formula per il prodotto

Passo Base: $n=1$ $z^1 = \rho^1 (\cos \theta + i \sin \theta)$

Passo induttivo Ipotesi: $z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

tesi: $z^{n+1} = \rho^{n+1} (\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta))$

$$\begin{aligned} \text{Dim.: } z^{n+1} &= z \cdot z^n = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \\ &= \rho^{n+1} [\underbrace{\cos \theta \cos(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}} + \underbrace{\cos \theta \cdot \sin(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}} i + \\ &\quad + \underbrace{\sin \theta \cdot \cos(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}} i - \underbrace{\sin \theta \cdot \sin(n\theta)}_{\text{uso ipotesi}}] \\ &= \rho^{n+1} [\underbrace{\cos((n+1)\theta)}_{\text{uso ipotesi}} + i \underbrace{\sin((n+1)\theta)}_{\text{uso ipotesi}}] \end{aligned}$$

Osservazione Combinando la formula per la potenza n-esima ed il Binomio di Newton si ottengono varie formule trigonometriche

Caso $n=2$ Prendiamo $z = \cos \theta + i \sin \theta$ $n=2$ ($\rho=1$)

$$z^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \leftarrow \text{formula di prima}$$

$$\begin{aligned} z^2 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + i^2 \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Poiché z^2 è sempre lui, la parte reale e quella immaginaria devono coincidere, da cui

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

Parte reale

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

Parte immaginaria

Caso $n=3$ $z = \cos \theta + i \sin \theta$

$$z^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \end{aligned}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria otteniamo che

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

Esempio 1 $(1+i)^6$

1° modo: sviluppare con il binomio di Newton

2° modo: passare in ρ e θ ... $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

In forma esponenziale

$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$$

Quindi

$$(1+i)^6 = \left[\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \right]^6 = (\sqrt{2})^6 \cdot e^{i \frac{\pi}{4} \cdot 6} = 8 \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}} = -8i$$

modulo 8 e
argomento $\frac{3\pi}{2}$

Esempio 2 $(1+i)^{6000}$

$$\begin{aligned} (1+i)^{6000} &= \left[\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \right]^{6000} = (\sqrt{2})^{6000} e^{i \frac{\pi}{4} \cdot 6000} \\ &= 2^{3000} \cdot e^{i \boxed{1500\pi}} = 2^{3000} \end{aligned}$$

multiplo di 2π

Radice n -esima di un numero complesso

Dato un numero complesso $a \in \mathbb{C}$, le radici complesse n -esime di a sono tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^n = a$ ($n \geq 1$ intero)

Se $a = 0$, allora l'unico z che soddisfa l'equazione è $z = 0$.

Basta vedere che $|z|^n = |a| = 0$, quindi $|z| = 0$.

Se $a \neq 0$, allora esistono sempre esattamente n numeri complessi z che verificano l'equazione $z^n = a$. Disegnati nel piano di Gauss, questi n numeri sono i vertici di un poligono di n lati regolare con centro nell'origine.

Come si trovano? Si scrivono a e z in forma esponenziale

$$a = r e^{i\varphi} \quad (r \text{ e } \varphi \text{ sono dati perché } a \text{ è dato})$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad (\rho \text{ e } \theta \text{ sono incogniti})$$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = r e^{i\varphi} = a$$

$\uparrow$
 formula per
 potenza n -esima

Cosa deve accadere perché i 2 numeri siano uguali? Devono avere

→ lo stesso modulo

→ argomenti che differiscono per un multiplo di 2π

Quindi

$$\rho^n = r$$

$$n\theta = \varphi + 2k\pi$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

A k devo dare tutti i possibili valori interi $0, 1, 2, 3, \dots$ (anche negativi).

Tuttavia ottengo angoli diversi solo per $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Esempio 1 Radici cubiche di i . Risolvere $z^3 = 8i$

Scrivo $8i$ in forma esponenziale: $8i = 8e^{i\pi/2}$

Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Quindi $\rho^3 = 8$

$$\rho = 2$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

Provo a sostituire $k = 0, 1, 2, \dots$

$$k=0 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$k=1 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$k=2 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$k=3 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6} \text{ già trovato}$$

$$k=4 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \text{ "}$$

Calcolati i valori di θ corrispondenti a $k = 0, 1, 2$, i restanti coincidono sempre con questi.

Quindi le 3 soluzioni sono

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

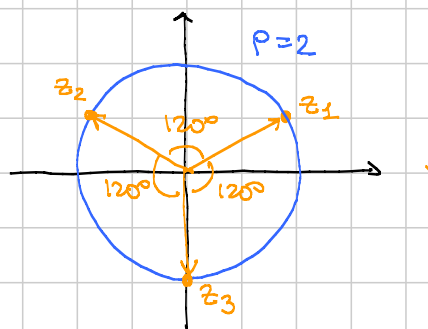
$$z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Oss. È facile a questo p.to passare in forma cartesiana

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \dots = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = -2i$$



Achtung! Quando si scrive $\rho^3 = 8$ si intende l'unica radice cubica reale di 8.

Non confondere le radici n -esime in ambito reale dalle radici n -esime in ambito complesso.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 097

Titolo nota

03/12/2011

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Un'eq. diff. lineare di ordine k si presenta nella forma

$$a_k(t)u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t)$$

$$\sum_{i=0}^k a_i(t)u^{(i)} = f(t)$$

Fatto generale La soluzione di un'eq. diff. lineare esiste finché può, cioè non ha problemi finché non ha problemi i coefficienti, o il termine noto.

Detto in altro modo: se i coeff. esistono e sono continui in un certo intervallo (a,b) , e lo stesso vale per il termine noto, allora anche la soluzione esiste per ogni $t \in (a,b)$

Teorema 1 L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare di ordine k OMogenea è uno spazio vettoriale di dimensione k .

Quindi, se $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ è una base di questo spazio, allora la soluzione generale sarà della forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t)$$

dove $c_1, c_2, \dots, c_k$ sono k parametri reali.

Operativamente: se uno conosce una base, allora conosce la soluzione generale.

Osservazione In uno spazio vettoriale le basi sono infinite, ma ne basta una qualunque.

Dim.1° fatto La somma di 2 soluzioni è ancora una soluzione.Siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni di una eq. omogenea, cioè

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0 \quad \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = 0$$

↑
l'eq. è omogenea

Sia $w(t) = u(t) + v(t)$. Dico che $w(t)$ è una soluzione della stessa equazione. Infatti

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^k a_i(t) [u^{(i)}(t) + v^{(i)}(t)]$$

↑
derivata somma =
somma derivate

$$= \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = 0 + 0 = 0$$

uso che u e v
sono soluzioni
↓

2° fatto Il prodotto di una soluzione per una costante è ancora una soluzione.Sia $u(t)$ una soluzione, sia $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $w(t) = \lambda u(t)$. Per ipotesi $u(t)$ è una soluzione, cioè

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0$$

Ma allora

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^k a_i(t) \lambda u^{(i)}(t) = \lambda \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0$$

3° fatto Per dimostrare che lo spazio ha dimensione k , bisogna trovare k generatori linearmente indipendenti.Supponiamo che tutti i coeff. siano definiti per t in un certo intervallo (a, b) . Prendo $t_0 \in (a, b)$. Risolvo il problema di Cauchy con condizioni iniziali

$$\left. \begin{array}{l} u(t_0) = \\ u'(t_0) = \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = \end{array} \right\} \text{Metto tutti 0 tranne una a la posizione } i\text{-esima.}$$

Otengo così soluzioni $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$.

Dico che questi sono k generatori linearmente indipendenti.

Devo dimostrare 2 cose

1°: che sono linearmente indipendenti Considero una loro comb. lin.

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) = w(t)$$

e suppongo che sia la funzione nulla. Allora tutte le sue derivate si annullano in t_0 . Ma la derivata i -esima di $w(t)$ calcolata in t_0 è la somma delle derivate i -esime, e queste sono tutte 0 tranne quella di $u_i(t)$ che fa 1.

Quindi $w^{(i)}(t_0) = c_i = 0$, cioè tutti i c_i sono nulli

2°: che ogni soluzione è combinazione lineare delle $u_i(t)$.

Prendo una soluzione $w(t)$ qualunque. Questa e le sue derivate avranno dei valori in t_0 . Prendo

$$c_1 = w(t_0), \quad c_2 = w'(t_0), \quad c_3 = w''(t_0), \dots, \quad c_k = w^{(k-1)}(t_0).$$

Allora

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t) = v(t)$$

è una soluzione dell'equazione e coincide in t_0 con $w(t)$, insieme alle sue derivate fino alla $(k-1)$ -esima.

Allora $v(t)$ e $w(t)$ sono 2 soluzioni dello stesso problema di Cauchy, quindi coincidono per unicita.

Teorema 2 L'insieme delle soluzioni di una eq. diff. lineare di ordine k NON omogenea si rappresenta nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t) + \bar{u}(t)$$

dove

- $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ è una base dello spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea associata, cioè l'equazione che ha gli stessi coefficienti ma $f(t) \equiv 0$
- $\bar{u}(t)$ è una soluzione qualunque dell'equazione non omogenea

Operativamente la formula permette di trovare TUTTE le soluzioni dell'equazione NON omogenea pur di conoscere

- una soluzione qualunque dell'eq. NON omogenea
- tutte le soluzioni dell'eq. omogenea (basta in realtà una base).

Dim. Sia $\bar{u}(t)$ una soluzione qualunque della non omogenea.
Sia $u(t)$ un'altra soluzione della non omogenea.
Allora per ipotesi

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) \bar{u}^{(i)}(t) = f(t) \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t)$$

Pongo $w(t) = u(t) - \bar{u}(t)$. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) &= \sum_{i=0}^k a_i(t) [u^{(i)}(t) - \bar{u}^{(i)}(t)] \\ &= \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^k a_i(t) \bar{u}^{(i)}(t) \\ &= f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $w(t)$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Ma allora $u(t) - \bar{u}(t) = w(t)$, quindi

$$u(t) = \bar{u}(t) + \overbrace{w(t)}^{\text{perché } w \text{ è soluz. dell'eq. omog.}} = \bar{u}(t) + c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t),$$

— 0 — 0 —

che è la formula che volevamo dimostrare.

Operativamente servono:

- un metodo per trovare una base per lo spazio delle soluzioni delle equazioni omogenee
- un metodo per trovare sol. (almeno 1) per equazioni non omogenee.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 098

Titolo nota

03/12/2011

Eq. diff. lineari omogenee. La teoria generale vale per equazioni lineari a coeff. qualunque. Se i coefficienti sono costanti, esiste una procedura per trovare una base dello spazio delle soluzioni

Eq. ordine 1 $au' + bu = 0$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$
 $u' = -\frac{b}{a}u$

Una soluzione si vede subito ed è $u_1(t) = e^{-\frac{b}{a}t}$ (verifica diretta).
 Quindi la soluzione generale è

$$u(t) = ce^{-\frac{b}{a}t}$$

Osservazione Il coeff. $-\frac{b}{a}$ che compare all' esponente è la radice del polinomio $ax+b$.

Eq. ordine 2 $au'' + bu' + cu = 0$ Procedura per determinare una base
 equazione $\rightarrow$ polinomio $\rightarrow$ radici $\rightarrow$ base

Polinomio associato: $ax^2 + bx + c$

Determino le radici del polinomio. Ci sono 3 casi

- $\Delta > 0$ Due radici reali distinte: λ, μ ($\lambda \neq \mu$). Allora una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$

Quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

- $\Delta = 0$ Due radici reali coincidenti, o meglio una radice reale λ di molteplicità 2. Una base è $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t}$$

Oss. Le funzioni $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ non sono linearmente dipendenti. Per essere linearmente dipendenti il coeff. deve essere un numero e non una funzione della t .

- $\Delta < 0$ Il polinomio non ha radici reali, ma ha una coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Allora una base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = 0$ Polinomio: $x^2 + 3x - 4 = 0$
 $(x+4)(x-1) = 0$ Radici: $x = -4$ e $x = 1$
 Base: e^{-4t} , e^t
 Soluzione generale: $a e^{-4t} + b e^t = u(t)$

Esempio 2 $u'' - 6u' + 9u = 0$ Polinomio: $x^2 - 6x + 9 = 0$
 $(x-3)^2 = 0$ Radici: $x = 3$ di molteplicità 2.
 Base: e^{3t} , $t e^{3t}$
 Soluzione generale: $u(t) = a e^{3t} + b t e^{3t}$

Esempio 3 $u'' + 8u' + 17u = 0$ Polinomio: $x^2 + 8x + 17 = 0$
 Radici: $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-17} = -4 \pm \sqrt{-1} = -4 \pm i$
 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = -4$ e $\beta = 1$.
 Base: $e^{-4t} \cos(t)$, $e^{-4t} \sin(t)$.
 Soluzione generale:

$$u(t) = a e^{-4t} \cos(t) + b e^{-4t} \sin(t)$$

Esempio 4 $u'' - 4u' = 0$ Polinomio: $x^2 - 4x = 0$ $x(x-4) = 0$
 Radici: $x = 0$ e $x = 4$. Base: $e^{0t} = 1$, e^{4t}
 Sol. generale: $u(t) = a + b e^{4t}$

Esempio 5 $u'' - 4u = 0$ Polinomio: $x^2 - 4 = 0$, $(x+2)(x-2) = 0$
 Radici: $x = 2$ e $x = -2$. Base: e^{2t} , e^{-2t}
 Sol. generale: $u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$

Oss. Se e^{2t} , e^{-2t} è una base, allora un'altra base è
 $\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$, $\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$

Quindi un'altra base è $\sinh(2t)$, $\cosh(2t)$, quindi la soluzione generale si può scrivere come

$$u(t) = a \sinh(2t) + b \cosh(2t).$$

Esempio 6 $u'' + 4u = 0$ Polinomio: $x^2 + 4 = 0$, cioè $x^2 = -4$
 Radici: $x = \pm 2i$, complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$
 con $\alpha = 0$ e $\beta = 2$.
 Base: $e^{0t} \cos(2t)$, $e^{0t} \sin(2t)$
 Soluzione generale:

$$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t).$$

Se l'equazione ha ordine k , il polinomio associato avrà grado k . Per un fatto generale un polinomio di grado k ha esattamente k radici complesse se contate con molteplicità. Le k radici producono i k elementi della base secondo questa regola

* una radice reale λ di mult. m produce $e^{\lambda t}$
 * " " " " " " produce m elementi della base:

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

* una coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di mult. m produce $2m$ elementi: $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

* una coppia di radici $\alpha \pm i\beta$ di mult. m produce $2m$ elementi:

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha t} \cos(\beta t), & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ t e^{\alpha t} \cos(\beta t), & t e^{\alpha t} \sin(\beta t) \dots \\ t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), & t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t). \end{array}$$

Come determinare una soluzione di un'eq. non omogenea

Due metodi:

- metodo di variazione delle costanti (algoritmo che funziona sempre, ma anche nei casi semplici implica molti conti)
- provare ad indovinare (rapido quando funziona)

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = e^{2t}$

L'equazione omogenea associata è $u'' + 3u' - 4u = 0$. L'abbiamo risolta prima e ha come sol. generale $u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Mi serve una soluzione qualunque dell'eq. NON omogenea.

La cerco della forma $u(t) = \lambda e^{2t}$. Vedo se esistono valori di λ per cui questa è soluzione. Calcolo

$$u'(t) = 2\lambda e^{2t}, \quad u''(t) = 4\lambda e^{2t}$$

Sostituisco nell'equazione

$$\underbrace{4\lambda e^{2t}}_{u''} + \underbrace{6\lambda e^{2t}}_{3u'} - \underbrace{4\lambda e^{2t}}_{4u} = e^{2t}, \quad 6\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

Quindi $\bar{u}(t) = \frac{1}{6} e^{2t}$ è soluzione dell'equazione non omogenea.

In conclusione, la soluzione generale dell'eq. non omogenea è

$$u(t) = \underbrace{\frac{1}{6} e^{2t}}_{\substack{\text{sol.} \\ \text{indovinata}}} + \underbrace{a e^{-4t} + b e^t}_{\text{sol. gen. eq. omogenea}}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 099

Titolo nota

03/12/2011

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = e^{-3t}$

Cerco una soluzione dell'eq. non omogenea del tipo $u(t) = \lambda e^{-3t}$.

Allora $u'(t) = -3\lambda e^{-3t}$, $u''(t) = 9\lambda e^{-3t}$. Quindi

$$9\lambda e^{-3t} - 9\lambda e^{-3t} - 4\lambda e^{-3t} = e^{-3t} \quad -4\lambda e^{-3t} = e^{-3t} \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

$$u''(t) + 3u'(t) - 4u = e^{-3t}$$

Sol. generale:

$$u(t) = \underbrace{-\frac{1}{4}e^{-3t}}_{\text{sol. speciale eq. non omog.}} + \underbrace{ae^{-4t} + be^t}_{\text{sol. gen. eq. omogenea}}$$

Esempio 2 $u'' + 3u' - 4u = e^{-4t}$ Provo con $u(t) = \lambda e^{-4t}$

$u'(t) = -4\lambda e^{-4t}$, $u''(t) = 16\lambda e^{-4t}$. Sostituisco:

$$16\lambda e^{-4t} - 12\lambda e^{-4t} - 4\lambda e^{-4t} = e^{-4t} \quad 0 = e^{-4t}$$

$$u'' + 3u' - 4u = e^{-4t}$$

Non funziona! Bella scoperta: e^{-4t} è soluzione dell'omogenea, quindi è ovvio che sostituito a sx fa venire 0.

Rimedio: mettere una t davanti, cioè cerco una soluzione del tipo

$$u(t) = \lambda t e^{-4t}$$

$u'(t) = \lambda e^{-4t} - 4\lambda t e^{-4t}$, $u''(t) = -4\lambda e^{-4t} - 4\lambda e^{-4t} + 16\lambda t e^{-4t}$

Sostituisco

$$\underbrace{-8\lambda e^{-4t} + 16\lambda t e^{-4t}}_{u''} + \underbrace{3\lambda e^{-4t} - 12\lambda t e^{-4t}}_{+3u'} - \underbrace{4\lambda t e^{-4t}}_{-4u} = e^{-4t}$$

$$-5\lambda e^{-4t} = e^{-4t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Quindi la sol. generale è $u(t) = -\frac{1}{5}te^{-4t} + ae^{-4t} + be^t$

Fatto generale: se il secondo membro è un esponenziale del tipo e^{at} ,
il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda e^{at}$$

Funziona sempre tranne quando e^{at} era già soluz. dell'eq. omogenea. In tal caso il tentativo diventa

$$u(t) = \lambda t e^{at}$$

Questo non funziona se $t e^{at}$ era soluzione dell'omog. In tal caso si prova

$$u(t) = \lambda t^2 e^{at}$$

e così via finché serve.

Esempio 3 $u'' + 3u' - 4u = \sin(2t)$

Tentativo: $u(t) = \lambda \sin(2t) + \mu \cos(2t)$

$$u'(t) = 2\lambda \cos(2t) - 2\mu \sin(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda \sin(2t) - 4\mu \cos(2t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-4\lambda \sin(2t) - 4\mu \cos(2t)}_{u''(t)} + \underbrace{6\lambda \cos(2t) - 6\mu \sin(2t)}_{+3u'(t)} - \underbrace{4\lambda \sin(2t) - 4\mu \cos(2t)}_{-4u(t)} = \sin(2t)$$

$$(-8\lambda - 6\mu) \sin(2t) + (-8\mu + 6\lambda) \cos(2t) = \sin(2t)$$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} -8\lambda - 6\mu = 1 & \text{coeff. di } \sin(2t) & -8\lambda - \frac{3}{2}\lambda = 1 & ; & -\frac{25}{2}\lambda = 1 \\ +6\lambda - 8\mu = 0 & \text{coeff. di } \cos(2t) & \mu = \frac{6}{8}\lambda = \frac{3}{4}\lambda \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{2}{25} \quad \mu = -\frac{3}{50}$$

Soluzione generale: $u(t) = \underbrace{-\frac{2}{25}}_0 \sin(2t) - \underbrace{\frac{3}{50}}_0 \cos(2t) + a e^{-4t} + b e^t$

Fatto generale: se al 2° membro c'è $\cos(at)$ e/o $\sin(at)$, allora il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda \cos(at) + \mu \sin(at)$$

(Il tentativo deve essere misto in $\sin$ e $\cos$, anche se il 2° membro è puro).

Non funziona se lo stesso $\sin$ o $\cos$ è soluzione dell'omogenea, in tal caso si aggiunge t finché basta.

Esempio 4 $u'' + 4u = \sin(2t)$

Omogenea: $x^2 + 4 = 0$, $x = \pm 2i$, Sol. omog.: $u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$

In questo caso $\sin(2t)$ già compare nell'omogenea, quindi il tentativo che funziona è

$$u(t) = \lambda t \cos(2t) + \mu t \sin(2t)$$

Conti...

Esempio 5 $u'' + 3u' - 4u = t^3 + 7$

Tentativo da fare: $u(t) =$ polinomio generico dello stesso grado, quindi

$$u(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (\text{polinomio sempre completo})$$

$$u'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$u''(t) = 6at + 2b$$

Sostituendo:

$$\underbrace{6at + 2b}_{u''} + \underbrace{3at^2 + 6bt + 3c}_{+3u'} - \underbrace{4at^3 - 4bt^2 - 4ct - 4d}_{-4u} = t^3 + 7$$

$$\begin{cases} -4a = 1 & \text{coeff. } t^3 \\ 3a - 4b = 0 & \text{coeff. } t^2 \\ 6a + 6b - 4c = 0 & \text{coeff. } t \\ 2b + 3c - 4d = 7 & \text{termine noto} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema lineare triangolare,} \\ \text{quindi facilmente risolvibile} \end{array}$$

Quando non funziona? Quando 0 è tra le radici del polinomio associato all'equazione omogenea

Esempio 6 $u'' + 9u = t^2$ l'omogenea associata è $u'' + 9u = 0$

Polinomio: $x^4 + 9x^2 = 0$ $x^2(x^2 + 9) = 0$

Radici: $x=0$ di molteplicità 2, $x = \pm 3i$

Base: e^{0t} , $t e^{0t}$, $\cos(3t)$, $\sin(3t)$

$1, t, \cos(3t), \sin(3t)$

Quindi 1 e t sono polinomi che sono solut. dell'omogenea, quindi il tentativo classico $u(t) = at^2 + bt + c$ non funziona.

Bisogna aggiungere t^2 :

$$u(t) = \underbrace{at^4 + bt^3 + ct^2}_{t^2 \text{ tentativo precedente}} \quad (\text{non serve completare con } dt + e)$$

Conti ...

Esempio 7 $u'' + 3u' - 4u = \cos(2t) + t^3 + e^{5t} + e^{-4t}$

Il tentativo è la somma dei tentativi, oppure risolvo considerando un pezzo per volta e poi sommo le soluzioni.

Fatto generale: se

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f_1(t) \quad \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)}(t) = f_2(t)$$

Allora ponendo $w(t) = u(t) + v(t)$ abbiamo che

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)}(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 100

Titolo nota

07/12/2011

Esempio 1 Calcolare $(\sqrt{3}-i)^{30}$. Dare la risposta in forma cartesiana.

$\sqrt{3}-i \rightsquigarrow$ Forma esponenziale $\rightsquigarrow$ Elevo alla 30 $\rightsquigarrow$ Forma cartesiana

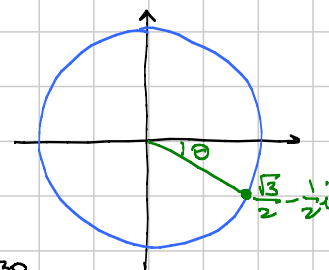
$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2 \quad \text{Per calcolare } \theta \text{ metto in evidenza } \rho$$

$$\sqrt{3}-i = 2 \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos \theta} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin \theta} i \right) \quad \text{Quindi } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

In forma esponenziale

$$z = \sqrt{3}-i = \rho e^{i\theta} = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$z^{30} = \left(2 e^{-\frac{\pi}{6}i} \right)^{30} = 2^{30} e^{-5\pi i} = 2^{30} e^{-\pi i} = -2^{30}$$



Se fosse stato z^{2011} avrei dovuto fare

$$z^{2011} = \left(2 e^{-\frac{\pi}{6}i} \right)^{2011} = 2^{2011} e^{-\frac{2011}{6}i\pi}$$

Ora $2010 : 6 = 335$, quindi $2011 = 6 \cdot 335 + 1$, quindi

$$-\frac{2011}{6}\pi = -\frac{6 \cdot 335 + 1}{6}\pi = \boxed{-335\pi} - \frac{\pi}{6}, \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} z^{2011} &= 2^{2011} \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2^{2011} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2^{2011} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= 2^{2010} (\sqrt{3}-i) \end{aligned}$$

Se fosse stato z^{-2011} , basta fare

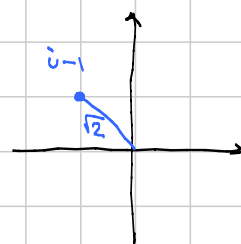
$$\frac{1}{z^{2011}} = \frac{1}{2^{2010} (\sqrt{3}-i)} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2^{2010} \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}+i}{2^{2012}}$$

Esempio 2 $z = (i-1) z^{-25}$

Passo in forma esponenziale: $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Quindi $z = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$, da cui

$$\begin{aligned} z^{25} &= \left(\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \right)^{25} = (\sqrt{2})^{25} e^{\frac{75\pi}{4}i} = (\sqrt{2})^{25} e^{\frac{(72+3)\pi}{4}i} \\ &= 2^{12} \sqrt{2} \cdot e^{\left(18\pi + \frac{3\pi}{4}\right)i} = 2^{12} \boxed{\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}} \\ &= 2^{12}(-1+i) \end{aligned}$$

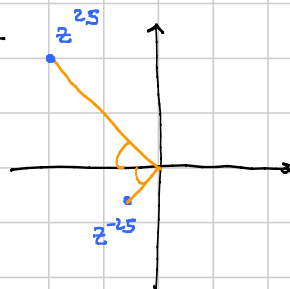


$$z^{-25} = \frac{1}{z^{25}} = \frac{1}{2^{12}(-1+i)} \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2^{12}(-2)} = -\frac{1+i}{2^{13}}$$

Oss. Vale sempre la formula $\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$,

quindi un numero complesso ed il suo inverso stanno su rette uscenti dall'origine e simmetriche rispetto all'asse x .

— o — o —



Esempio 3 Radici quarte di -1

Questo vuol dire risolvere l'equazione $z^4 = -1$. Dalla teoria sappiamo che l'eq. ha esattamente 4 soluzioni, che nel piano di Gauss sono i vertici di un quadrato con centro nell'origine.

Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$ con ρ e θ incogniti. Scrivo -1 in forma esponenziale $-1 = 1 \cdot e^{\pi i}$. Impongo $z^4 = -1$, cioè

$$(e^{i\theta})^4 = 1 \cdot e^{\pi i} ; \boxed{\rho^4} e^{\boxed{4i\theta}} = \boxed{1} \cdot e^{\boxed{\pi i}}$$

Due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso ρ e argomenti che differiscono di $2k\pi$. Ottengo

$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assegno i valori $k=0,1,2,3$ e trovo le 4 soluzioni

$$z_1 = 1 \cdot e^{\frac{\pi i}{4}} \quad k=0$$

$$z_2 = 1 \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}} \quad k=1$$

$$z_3 = 1 \cdot e^{\frac{5\pi i}{4}} \quad k=2$$

$$z_4 = 1 \cdot e^{\frac{7\pi i}{4}} \quad k=3$$

Volevo si possono scrivere in forma cartesiana ($a = \rho \cos \theta$, $b = \rho \sin \theta$)

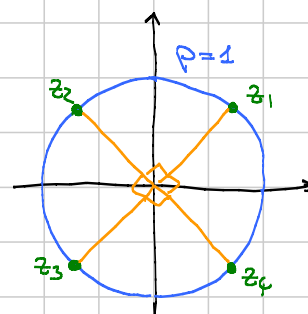
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1-i)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$$

Più rapidamente: trovate z_1 , le restanti radici si ottengono ruotando la prima di $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



Applicazione: trovare la soluzione generale dell'eq. diff.

$$u^{(4)} + u = 0 \quad (\text{lineare, coeff cost., omogenea, ordine 4})$$

Polinomio associato: $x^4 + 1 = 0$. Radici: è come fare $x^4 = -1$, quindi le radici sono z_1, z_2, z_3, z_4 come sopra. Le radici sono a 2 a 2 coniugate, cioè della forma $\alpha \pm i\beta$

$$z_1 \text{ e } z_4 \text{ sono } = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i = \alpha \pm i\beta$$

$$\leadsto \text{produce 2 elem. della base: } e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

$$z_2 \text{ e } z_3 \text{ sono: } \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 \pm i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i = \alpha \pm i\beta$$

$$\leadsto \text{produce 2 elem. della base: } e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

Soluzione generale: $u(t) =$ combinazione lineare dei 4 elementi della base.

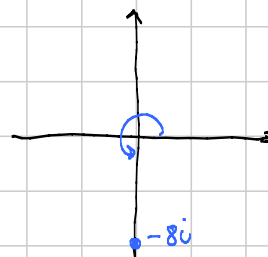
Esempio 4 Trovare le radici cubiche di $-8i$, cioè risolvere $z^3 = -8i$

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad -8i = 8 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$z^3 = \rho^3 e^{3i\theta} = 8 e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$\rho^3 = 8$$

$$3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$



$$\rho = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{Non resta che sostituire } k = 0, 1, 2.$$

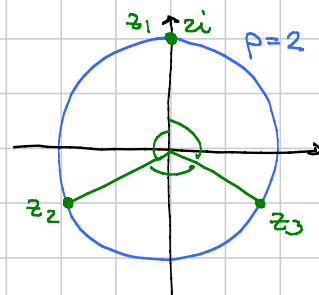
Più rapidamente: vedo a occhio una soluzione $z_1 = 2i$, $z_1^3 = -8i$ Ok
poi ottengo z_2 e z_3 ruotando di 120° .

Quindi

$$z_3 = 2 e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$$

↑
stesso ρ
di z_1

$$z_2 = 2 e^{\frac{\pi}{6}i} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$$



$$\text{Nota bene: } -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}$$

Fatto generale: avere le radici è equivalente ad avere la fattorizzazione.

Conseguenza Ogni polinomio di grado n è il prodotto di n polinomi di grado 1 (ovviamente a coeff. complessi).

Esempio 1 $x^4 - 16$. Le radici di questo polinomio sono le radici quarte complesse di 16, quindi $2, 2i, -2, -2i$ da cui

$$x^4 - 16 = (x-2)(x-2i)(x+2)(x+2i)$$

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$$

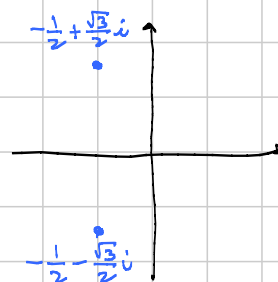
Volevamo si arrivava direttamente scomponendo:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2).$$

Esempio 2 $x^2 + x + 1 = 0$ Equazione di 2° grado:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \text{ da cui}$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \left(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$



Le 2 radici sono complesse coniugate.

Esempio 3 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ Equazioni biquadratiche

Pongo $x^2 = y$ e ottengo $y^2 + y + 1$ che è l'equazione di prima, da cui

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad y_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

Nella variabile x mi aspetto 4 soluzioni. Di queste, 2 si ottengono facendo la radice quadrata di y_1 e 2 facendo la radice quadrata di y_2 .

Per fare la radice di y_1 , scriviamo $y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \underbrace{1}_{\cos \theta} \cdot e^{i \underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\sin \theta}}$

Devo risolvere $z^2 = y_1$, cioè $\rho^2 e^{2i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$, da cui

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

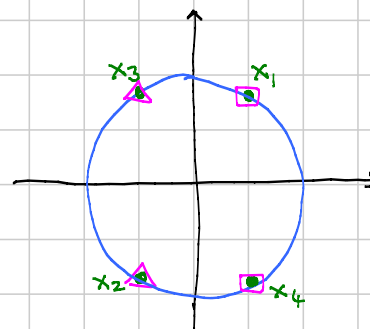
da cui 2 soluzioni $x_1 = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_2 = 1 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Fare la radice di y_2 è analogo: $y_2 = 1 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i}$, da cui risolvere $z^2 = y_2$ si riduce a

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

da cui altre 2 soluzioni: $x_3 = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = 1 \cdot e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ho così ottenuto 4 radici $x_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ con 4 possibilità per i segni



Oss.1 le radici sono a 2 a 2 coniugate

(fatto generale: se il polinomio ha coeff. reali, allora le radici complesse con $\text{Im} \neq 0$ sono a 2 a 2 coniugate).

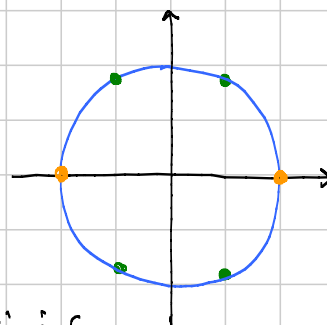
Oss.2 le radici sono vertici di un rettangolo, ma non di un quadrato (per polinomi generici le radici non formano necessariamente un poligono regolare).

Oss.3 In questo caso le radici sono 4 vertici di un esagono regolare.

Per avere l'esagono devo aggiungere ± 1 , che sono le soluzioni di $x^2 - 1 = 0$, dunque il polinomio

$$(x^4 + x^2 + 1)(x^2 - 1) \quad \text{ha come radici i 6 vertici dell'esagono}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 radici ± 1



Ora $(x^4+x^2+1)(x^2-1) = x^6-1$ e $x^6-1=0$ ha come soluzioni proprio le 6 radici seste di 1, che sono 1 e le sue ruotate di 60° .

Esempio 4 Trovare le radici del polinomio $x^4+x^3+x^2+x+1=0$
(ad esempio per risolvere $u^{(4)}+u''' + u'' + u' + u = 0 \dots$)

Se fosse $x^3+x^2+x+1=0$ si risolverebbe raccogliendo:

$$x^2(x+1) + (x+1) = 0, \quad (x^2+1)(x+1) = 0 \leadsto x = -1, x = \pm i.$$

Con anche x^4 il raccoglimento non funziona. Tuttavia

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1) = x^5-1$$

Ora $x^5-1=0$ ha 5 radici, cioè le radici quinte di 1 (facili da trovare). Di queste 5 radici, una annulla il fattore $x-1$ (e si tratta di $x=1$), le altre 4 devono per forza annullare $x^4+x^3+x^2+x+1$

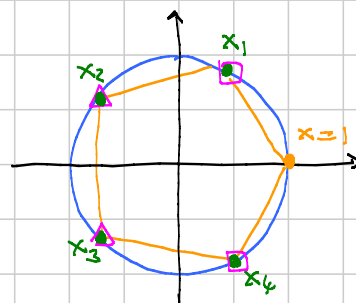
Volendo si trova che

$$x_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i}$$

$$x_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i}$$

$$x_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i}$$

$$x_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i}$$



Esercizio Scrivere $x^4+x^3+x^2+x+1$ come prodotto di 2 polinomi di 2° grado a coeff. reali (uno avrà come radici x_1 e x_4 , l'altro x_2 e x_3).

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 102

Titolo nota

14/12/2011

Fattorizzazione di polinomi

Fatto generale : ogni polinomio $p(x)$ a coeff. complessi di grado n si scrive come prodotto di n polinomi a coeff. complessi di grado 1.

Meglio : se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, allora

$$p(x) = a_n (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_m)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono le radici (complesse) di $p(x)$, ciascuna ripetuta a seconda della sua molteplicità.

Il fatto generale segue dal teorema fondamentale dell'algebra : ogni polinomio di grado n a coeff. complessi ha esattamente n radici, se contate con molteplicità.

Parte banale : un polinomio di grado n ha al massimo n radici. Infatti : una volta trovate n radici posso scomporre $p(x)$ come prodotto di n fattori di 1° grado. Ogni altra radice dovrebbe annullare uno dei fattori, quindi coincidere con una delle precedenti.

Parte difficile : un polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice complessa. Osservazione : basta almeno una radice per trovare esattamente n . Infatti : prendo $p(x)$ di grado n . Questo avrà una radice λ_1 . Per Ruffini posso dividere :

$$p(x) = (x - \lambda_1) q(x) \text{ grado } n-1$$

Ora $q(x)$ avrà a sua volta una radice λ_2 , e così via.

Fattorizzazione sui reali D'ora in poi $p(x)$ è a coeff. reali.

Fatto 1 Se α è una radice complessa di $p(x)$, allora anche $\bar{\alpha}$ è radice di $p(x)$.

Fatto 0, Se $z \in \mathbb{C}$, allora $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ ($p(x)$ a coeff. reali)

Dim. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n} \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 \\ &= p(\bar{z}) \end{aligned}$$

Fatto 0 $\Rightarrow$ Fatto 1: Sia α una radice, cioè $p(\alpha) = 0$. Allora
 $p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$, quindi anche $\bar{\alpha}$ è una radice.

Fatto 2 Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(x)$ (a coeff. reali) di molteplicità k , allora anche $\bar{\alpha}$ ha molteplicità k .

Supponendo di aver dimostrato il fatto 2, la fattorizzazione di $p(x)$ si presenta nella forma

$$p(x) = \underbrace{(x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_r)}_{\text{radici reali}} \underbrace{\overbrace{(x-\alpha_1)(x-\bar{\alpha}_1)}^{\text{coeff.}} \dots \overbrace{(x-\alpha_m)(x-\bar{\alpha}_m)}^{\text{realtà}}}_{\text{coppie di radici complesse coniugate}}$$

Sia $\alpha = a+ib$. Calcolo $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - \alpha x - \bar{\alpha} x + \alpha \bar{\alpha}$
 $= x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha \bar{\alpha}$
 $= x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$

quindi il prodotto ha coefficienti reali.

Fatto generale: ogni polinomio $p(x)$ a coeff. reali si scrive come prodotto di polinomi a coeff. reali di grado 1 e 2.

I fattori di 1° grado corrispondono alle radici reali, i fattori di 2° grado corrispondono ad una coppia di radici complesse coniugate.

Dim. fatto 2. Sia α una radice di $p(x)$. Allora anche $\bar{\alpha}$ è una radice. Ma allora

$$p(x) = \underbrace{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}_{\text{coeff. reali}} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{coeff. reali}}$$

Se ora α è radice di $q(x)$, allora anche $\bar{\alpha}$ lo sarà, e viceversa.

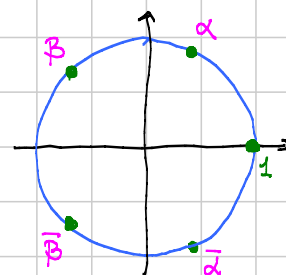
Questo mostra che hanno la stessa molteplicità.

Esempio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Osservo che $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Ora $x^5 - 1$ ha come radici le 5 radici quinte di 1, che si trovano facilmente. Di queste 5, $x=1$ è radice del fattore $x-1$, le altre 4 sono radici di $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

Quindi sui complessi:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \underbrace{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}_{\text{coeff. reali}} \underbrace{(x-\beta)(x-\bar{\beta})}_{\text{coeff. reali}}$$



Con semplici calcoli si vede che le radici hanno $\rho=1$ e

$$\theta = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$$

$\alpha \quad \beta \quad \bar{\beta} \quad \bar{\alpha}$

Ricordiamo che $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\operatorname{Re} \alpha x + \underbrace{|\alpha|^2}_1$ (vedi sopra)

Ora $\operatorname{Re}(\alpha) = \operatorname{Re}(\bar{\alpha}) = \cos \frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{Re}(\beta) = \operatorname{Re}(\bar{\beta}) = \cos \frac{4\pi}{5}$, quindi

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - \left(2\cos \frac{2\pi}{5}\right)x + 1 \quad (x-\beta)(x-\bar{\beta}) = x^2 - \left(2\cos \frac{4\pi}{5}\right)x + 1$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left[x^2 - 2\cos \frac{2\pi}{5} x + 1 \right] \cdot \left[x^2 - 2\cos \frac{4\pi}{5} x + 1 \right]$$

Esempio 2 $x^4 + 1$ Trovare la fattorizzazione.

A suo tempo: $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \dots$

Passando dai complessi: le radici complesse di $x^4 + 1$ sono le radici quante di -1 , che si trovano facilmente.

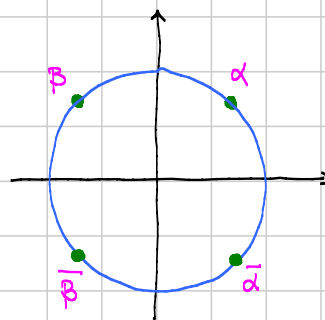
Brevemente: -1 ha $\rho = 1$ e $\theta = \pi$

Quindi le radici quante avranno $\rho = 1$ e

$\theta = \frac{\pi}{4} + \text{sfasamenti di } \frac{\pi}{2}$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



Fattorizzando:

$$x^4 + 1 = \underbrace{(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})}_{x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2} \underbrace{(x - \beta)(x - \bar{\beta})}_{x^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)x + |\beta|^2}$$

$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 103

Titolo nota

14/12/2011

Esponenziale complesso Dato $z = a+bi \in \mathbb{C}$, si definisce

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Esempio $e^i = \cos 1 + i \sin 1$ (1 è pensato come radiante)
 $e^{3+2i} = e^3 \cdot e^{2i} = e^3 (\cos 2 + i \sin 2)$

"Logaritmo" di un numero complesso Dato $a \in \mathbb{C}$, trovare il suo "logaritmo" vuol dire trovare le soluzioni dell'equazione $e^z = a$

Fatto generale, l'equazione $e^z = a$ ha

- nessuna soluzione se $a=0$
- infinite soluzioni se $a \neq 0$.

Esempio 1 Risolvere $e^z = -2$.

Scrivo -2 in forma esponenziale e z in forma cartesiana.

$$z = a+bi \quad -2 = 2e^{\pi i} \quad \text{uguagliando:}$$

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = 2e^{\pi i}$$

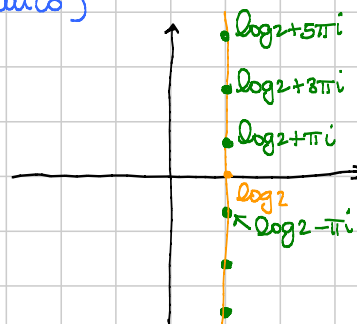
da cui (stesso ρ e θ che differiscono di multipli di 2π)

$$e^a = 2 \quad b = \pi + 2k\pi$$

$a = \log 2$ (occhio: qui si tratta del logaritmo reale di un numero reale positivo, quindi esiste ed è unico)

Quindi gli z che vanno bene sono tutti i numeri complessi del tipo

$$z = \underbrace{\log 2}_a + \underbrace{(2k+1)\pi i}_b$$



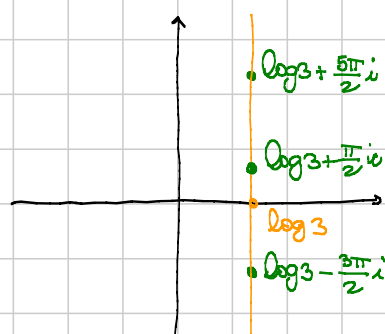
Esempio 2 $e^z = 3i$ $z = a+bi$ $3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$, quindi

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = 3 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{da cui}$$

$$e^a = 3, \quad b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$a = \log 3, \quad b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Quindi le soluzioni sono $z = \log 3 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$



Sorpresa In $\mathbb{C}$ la funzione e^z è periodica e il suo periodo è $2\pi i$.

Infatti

$$f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z = f(z)$$

Seno e coseno iperbolico di un numero complesso

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esempio Calcolare $\cosh(i)$. Dalla formula

$$\begin{aligned} \cosh(i) &= \frac{1}{2} (e^i + e^{-i}) = \frac{1}{2} (\underbrace{\cos 1 + i \sin 1}_{e^i} + \underbrace{\cos(-1) + i \sin(-1)}_{e^{-i}}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 + i \sin 1 + \cos 1 - i \sin 1) \\ &= \cos 1 \end{aligned}$$

Più in generale: $\cosh(\alpha i) = \cos \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha i) &= \frac{1}{2} (e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}) = \frac{1}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha - \cos(-\alpha) - i \sin(-\alpha)) \\ &= \frac{1}{2} (\cancel{\cos \alpha} + i \sin \alpha - \cancel{\cos \alpha} + i \sin \alpha) \\ &= i \sin \alpha \end{aligned}$$

Oss. $\sinh(z)$ e $\cosh(z)$ sono funzioni periodiche di periodo minimo $2\pi i$,

Seno e coseno di un numero complesso

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Sommando: $2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ da cui $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Sottraendo: $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ da cui $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Queste formule le abbiamo ricavate per θ reale. In generale per estensione si pone, per un qualunque $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Esempi $\sin(i) = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i}$

Ora $\frac{1}{i} = -i$, quindi $\sin(i) = -i \frac{e^{-1} - e^1}{2} = i \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = i \cdot \sinh 1$

In generale $\sin(i\alpha) = i \sinh \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio Risolvere l'equazione $\sin z = 2$, cioè cerco tutti i numeri complessi z tali che $\sin z = 2$.

1° passo: scrivo $\sin z$ usando l'esponenziale

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2, \text{ da cui } e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$

Pongo $w = e^{iz}$, così che $e^{-iz} = \frac{1}{w}$. Si ottiene

$$w - \frac{1}{w} = 4i, \text{ da cui } w^2 - 1 = 4iw, \quad w^2 - 4iw - 1 = 0$$

Risolvendo l'eq. di 2° grado $w_{1,2} = 2i \pm \sqrt{-4+1} = 2i \pm \sqrt{-3}$

Quindi $w_{1,2} = 2i \pm \sqrt{3}i = (2 \pm \sqrt{3})i$

Tornando in z dobbiamo risolvere $e^z = w$, cioè

$$e^z = (2 + \sqrt{3})i$$

$$e^z = (2 - \sqrt{3})i$$

In entrambi i casi scrivo $z = a + bi$, quindi $e^z = e^a \cdot e^{bi}$

$$e^a \cdot e^{bi} = (2 + \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^a \cdot e^{bi} = (2 - \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$a = \log(2 + \sqrt{3})$$

$$b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$a = \log(2 - \sqrt{3})$$

$$b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

In realtà dovevo risolvere $e^{iz} = w$, ma cambia poco.

Scrivo $z = a + bi$, da cui

$$e^{iz} = e^{i(a+bi)} = e^{ia-b} = e^{-b} \cdot e^{ia}$$

da cui

$$e^{-b} \cdot e^{ia} = (2 + \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{-b} \cdot e^{ia} = (2 - \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{-b} = (2 + \sqrt{3}); \quad b = -\log(2 + \sqrt{3})$$

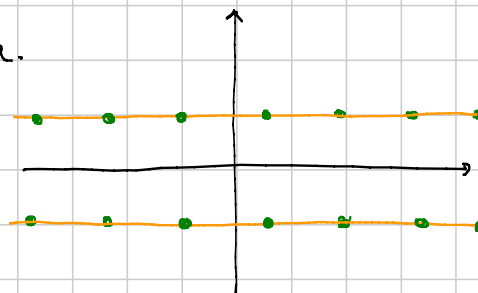
$$a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$e^{-b} = (2 - \sqrt{3}); \quad b = -\log(2 - \sqrt{3})$$

$$a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Oss. Le soluzioni devono essere periodiche di periodo reale, quindi rispetto alla parte reale.

Infatti il $2k\pi$ lo troviamo in a .



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 104

Titolo nota

15/12/2011

Metodo di variazione delle costanti Serve per trovare una soluzione di una equazione diff. lineare non omogenea (alternativo a provare ad indovinare)

Esempio $u'' - 3u' + 2u = t$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \leadsto (x-1)(x-2) = 0 \leadsto x=1, x=2 \leadsto e^t, e^{2t}$$

Cerco una soluzione dell'eq. non omogenea $u(t) = at + b$, da cui $u'(t) = a$, $u''(t) = 0$, e sostituendo:

$$0 - 3a + 2at + 2b = t$$

$$u'' - 3u' + 2u = t$$

$$\begin{cases} 2a = 1 & a = \frac{1}{2} \\ -3a + 2b = 0 & 2b = 3a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{Sol. speciale: } \bar{u}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

Sol. generale dell'equazione non omogenea: $u(t) = \underbrace{\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}}_{\text{sol. speciale}} + \underbrace{ae^t + be^{2t}}_{\text{sol. gen. eq. omog.}}$

Date opportune condizioni iniziali, posso trovare a e b .

Per esempio, se fosse $u(0) = 3$, $u'(0) = 5$, allora si impone

$$\underbrace{\frac{3}{4} + a + b}_{u(0)} = 3 \quad u'(t) = \frac{1}{2} + ae^t + 2be^{2t} \quad \underbrace{\frac{1}{2} + a + 2b}_{u'(0)} = 5$$

Risolviendo il sistema lineare si trovano a e b .

Risolviamo lo stesso esercizio con il metodo di variazione delle costanti.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$u(t) = ae^t + be^{2t}$$

Ora cerco una soluzione dell'equazione non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t)e^t + b(t)e^{2t}$$

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni incognite da trovare. Calcolo le derivate e sostituisco nell'equazione,

$$u'(t) = a'(t)e^t + a(t)e^t + b'(t)e^{2t} + 2b(t)e^{2t}$$

Imponiamo che la somma dei termini con le derivate si annulli:

$$a'(t)e^t + b'(t)e^{2t} = 0 \quad 1^a \text{ equazione}$$

Per calcolare $u''(t)$ basta derivare il 2° e 4° termine:

$$u''(t) = a'(t)e^t + a(t)e^t + 2b'(t)e^{2t} + 4b(t)e^{2t}$$

Sostituisco u'' , u' e u nell'equazione non omogenea data:

$$\begin{array}{l} a'(t)e^t + a(t)e^t + 2b'(t)e^{2t} + 4b(t)e^{2t} \\ - 3a(t)e^t - 6b(t)e^{2t} \\ + 2a(t)e^t + 2b(t)e^{2t} = \\ t \end{array} \quad \begin{array}{l} u''(t) \\ - 3u'(t) \\ + 2u(t) = \\ t \end{array}$$

Deve succedere che i termini con $a(t)$ e $b(t)$ se ne vanno (in caso contrario sono sbagliati i calcoli). Questo è dovuto al fatto che i due esponenziali erano soluzioni dell'omogenea. I termini che se ne vanno sono

$$\begin{array}{l} a(t) \cdot \{ \text{sostituire } e^t \text{ nell'eq. omogenea} \} \\ b(t) \cdot \{ \text{" } e^{2t} \text{ " " " } \} \end{array}$$

Quello che resta è

$$a'(t)e^t + 2b'(t)e^{2t} = t \quad 2^a \text{ equazione}$$

Ora 1° e 2° equazione sono due equazioni nelle incognite $a'(t)$ e $b'(t)$. Conclusione:

- risolvendo il sistema trovo $a'(t)$ e $b'(t)$,
- integrando trovo $a(t)$ e $b(t)$

$$\begin{cases} a'(t)e^t + b'(t)e^{2t} = 0 & 2^a - 1^a: b'(t)e^{2t} = t \Rightarrow b'(t) = te^{-2t} \\ a'(t)e^t + 2b'(t)e^{2t} = t & 2 \cdot 1^a - 2^a: a'(t)e^t = -t \Rightarrow a'(t) = -te^{-t} \end{cases}$$

Non resta che trovare $a(t)$ e $b(t)$ facendo le primitive:

$$a(t) = - \int te^{-t} dt = \underset{Fg}{t} \underset{F}{e^{-t}} - \int \underset{F}{1} \cdot \underset{G}{e^{-t}} dt = te^{-t} + e^{-t}$$

$$b(t) = \int te^{-2t} dt = \underset{Fg}{t} \underset{F}{(-\frac{1}{2}e^{-2t})} - \int \underset{F}{1} \cdot \underset{G}{(-\frac{1}{2}e^{-2t})} dt$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Trovati $a(t)$ e $b(t)$ basta sostituire nella formula per $u(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= a(t)e^t + b(t)e^{2t} = (te^{-t} + e^{-t})e^t + \left(-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)e^{2t} \\ &= t + 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

che è esattamente la soluzione speciale trovata prima!

Oss. A volte la soluzione speciale può venire "apparentemente" diversa.

Ad esempio avremmo potuto trovare $u(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + 6e^t$,
ma in tal caso il termine $6e^t$ sarebbe poi stato assorbito dalla
sol. gen. dell'eq. omogenea. Morale: la soluzione generale è
sempre la stessa anche a partire da soluzioni speciali "diverse".

Schema del metodo:

- cercare sol. speciale facendo variare le costanti
- calcolare u' e imporre annullamento termini con $a'e'b'$: 1^a equazione
- calcolare u'' e sostituire nell'eq. iniziale: 2^a equazione
- 1^a + 2^a equazioni $\leadsto$ calcolo di a' e b' $\leadsto$ a e b con primitiva.

— o — o —

Esempio $u'' - 5u' + 6u = te^{4t}$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0, x=2 \text{ e } x=3, \text{ base: } e^{2t}, e^{3t}$$

Variatione delle costanti: cerco una soluzione del tipo

$$u(t) = a(t)e^{2t} + b(t)e^{3t}$$

In alternativa: facciamo un tentativo del tipo $u(t) = (at+b)e^{4t}$

$$u'(t) = ae^{4t} + 4(at+b)e^{4t}$$

$$u''(t) = 4ae^{4t} + 4ae^{4t} + 16(at+b)e^{4t}$$

$$\underbrace{8ae^{4t} + 16ate^{4t} + 16be^{4t}}_{u''} - \underbrace{5ae^{4t} - 20ate^{4t} - 20be^{4t}}_{-5u'} + \underbrace{6ate^{4t} + 6be^{4t}}_{+6u} = te^{4t}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 & \text{coeff. di } te^{4t} \\ 3a + 2b = 0 & \text{coeff. di } e^{4t} \end{cases} \rightarrow \text{si risolve}$$

Oss. Se invece di e^{4t} ci fosse stato e^{3t} , bisognava aggiungere una t davanti al tentativo.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 105

Titolo nota

15/12/2011

Equazioni differenziali Lineari del primo ordine

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Per queste equazioni c'è una formula risolutiva che funziona a patto di saper fare alcune primitive. Ci sono 2 modi per arrivare alla formula

- fattore integrante
- variazione delle costanti

Fattore integrante Sia $A(t)$ una primitiva qualunque di $a(t)$, cioè

$$A'(t) = a(t)$$

Moltiplico a dx e a dx per $e^{A(t)}$, che si chiama fattore integrante

$$u'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)}u(t) = b(t)e^{A(t)}$$

I due termini a sinistra sono la derivata del prodotto $u(t)e^{A(t)}$

$$\left[u(t)e^{A(t)} \right]' = b(t)e^{A(t)}$$

Facendo la primitiva otteniamo che

$$u(t)e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)} dt + C$$

↑
parametro libero

da cui

$$u(t) = e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)} dt + ce^{-A(t)}$$

Formula risolutiva per Lineari del primo ordine

Serve: saper fare la primitiva di $a(t)$

" " " " " $b(t)e^{A(t)}$

Esempio 1

$$u' + 2tu = t^3$$

(non rientra tra quelle a variabili separabili o coeff. costanti)

Oss.: se invece di t^3 c'era solo t allora era anche a var. separabili

La vediamo come lineare di ordine 1 con $a(t) = 2t$ e $b(t) = t^3$. Allora $A(t) = t^2$, dunque il fattore integrante è $e^{A(t)} = e^{t^2}$. Moltiplico a dx e sx per il fattore integrante:

$$u' e^{t^2} + 2tu e^{t^2} = t^3 e^{t^2}$$

$$[u e^{t^2}]' = t^3 e^{t^2}$$

Integrando nuovamente: $u e^{t^2} = \int t^3 e^{t^2} dt$

$$\int t^3 e^{t^2} dt = \int \underset{F}{t^2} \cdot \underset{g}{t} e^{t^2} dt = \underset{F}{t^2} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{t^2}} - \int \underset{F}{2t} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} e^{t^2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}$$

Abbiamo così ottenuto che $u(t) e^{t^2} = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + C$ e semplificando

$$u(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} + C e^{-t^2}$$

Soluzione generale dell'equazione

Variazione delle costanti Devo risolvere $u' + a(t)u = b(t)$. Inizio a risolvere l'eq. omogenea corrispondente $u' + a(t)u = 0$. Questa è a variabili separabili: $u' = -a(t)u$

$$\frac{du}{u} = -a(t)u \quad ; \quad \frac{du}{u} = -a(t)dt \quad ; \quad \int \frac{du}{u} = -\int a(t)dt$$

$$\log|u| = -A(t) \quad ; \quad |u| = e^{-A(t)+C} \Rightarrow u(t) = C e^{-A(t)}$$

Soluzione generale dell'eq. omogenea

Ora serve una soluzione speciale dell'eq. non omogenea e la cerco mediante variazione delle costanti, cioè del tipo

$$u(t) = \underbrace{c(t)}_{\substack{\uparrow \text{costante che ora varia}}} e^{-A(t)}$$

Calcolo

$$u'(t) = c'(t) e^{-A(t)} - c(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco u' nell'equazione e trovo che

$$\underbrace{c'(t) e^{-A(t)}}_{u'(t)} - \underbrace{c(t) a(t) e^{-A(t)}}_{+ a(t) u(t)} + \underbrace{a(t) c(t) e^{-A(t)}}_{+ a(t) u(t)} = b(t)$$

Otengo così che

$$c'(t) e^{-A(t)} = b(t) \Rightarrow c'(t) = b(t) e^{A(t)}$$

quindi

$$c(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt.$$

Dunque la soluzione speciale è $u(t) = c(t) e^{-A(t)} = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$

In conclusione la soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$u(t) = \underbrace{e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt}_{\substack{\text{soluzione speciale eq.} \\ \text{non omogenea}}} + \underbrace{c e^{-A(t)}}_{\substack{\text{sol. generale} \\ \text{dell'eq. omogenea}}}$$

Oss. Ovviamente è la stessa formula ottenuta prima!

Esempio 2 $u' + \frac{u}{t} = \cos t \quad u(1) = \alpha$

Lineare del 1° ordine con $a(t) = \frac{1}{t}$ e $b(t) = \cos t$

Allora

$$A(t) = \log|t|, \text{ quindi } e^{A(t)} = e^{\log|t|} = |t|$$

Oss. La soluzione di un'eq. lineare esiste fino a quando i coeff. non hanno problemi. Nel vostro caso quindi l'intervallo massimale di

esistenza sarà $(0, +\infty)$ perché il dato iniziale è per $t=1$ e l'unico problema è per $t=0$.
 Quindi nell'intervallo massimale di esistenza $t>0$, quindi il fattore integrante è $|t| = t$.

Ora moltiplico a dx e so per t ;

$$t u' + u = t \cdot \cos t \\ = [tu]'$$

da cui

$$tu = \int t \cos t \, dt = t \sin t - \int 1 \cdot \sin t \, dt = t \sin t + \cos t + C$$

F g F G f G

parametro $\nearrow$

Dividendo

$$u(t) = \sin t + \frac{\cos t}{t} + \frac{C}{t}$$

Soluzione generale equazione non omogenea

Oss. Questo ci dice che $\frac{C}{t}$ è la soluzione generale dell'eq. omogenea associata $u' + \frac{u}{t} = 0$.

Facciamo finita che la condizione iniziale sia $u(\pi) = \alpha$. Per determinare C basta sostituire:

$$\alpha = u(\pi) = -\frac{1}{\pi} + \frac{C}{\pi}, \quad \pi\alpha = -1 + C, \quad C = \pi\alpha + 1$$

da cui la soluzione

$$u(t) = \sin t + \frac{\cos t}{t} + \frac{\pi\alpha + 1}{t}$$

Calcolare $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)$ in funzione del parametro α

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\sin t}_{\downarrow 0} + \frac{\cos t + \pi\alpha + 1}{t}$$

$\nearrow 2 + \pi\alpha$

- Se $2 + \pi\alpha > 0$, allora $\lim = +\infty$
- Se $2 + \pi\alpha < 0$, allora $\lim = -\infty$
- Se $2 + \pi\alpha = 0$, allora... $\lim = 0$.

$$\frac{\cos t + \pi\alpha + 1}{t} = \frac{\cos t - 1 + \pi\alpha + 2}{t} = \frac{\cos t - 1}{t} \cdot t \rightarrow 0$$

$\downarrow 0$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 106

Titolo nota

16/12/2011

Esempio 1 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' - 2u = \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

I coeff. non hanno problemi, quindi c'è
esistenza globale per $t \geq 0$ e $t \leq 0$.

Domanda: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'equazione è lineare a coeff. costanti non omogenea. Eq. omogenea associata

$$u' - 2u = 0 \leadsto x - 2 = 0 \leadsto x = 2 \leadsto \text{base: } e^{2t}$$

Sol. gen. eq. omogenea è $u(t) = c e^{2t}$

Devo trovare sol. speciale dell'eq. non omogenea, ma non si riesce esplicitamente.

Veado l'eq. come del tipo $u' + a(t)u = b(t)$ e provo a risolvere con il
fattore integrante. In questo caso $a(t) = -2$, quindi $A(t) = -2t$,
quindi fattore integrante $= e^{-2t}$. Moltiplico

$$u' e^{-2t} - 2u e^{-2t} = e^{-2t} \cdot \arctan t$$

$$[u e^{-2t}]'$$

Facendo la primitiva: $u e^{-2t} = \int e^{-2t} \cdot \arctan t \, dt + c$, da cui

$$u(t) = \underbrace{e^{+2t} \int e^{-2t} \cdot \arctan t \, dt}_{\substack{\rightarrow \text{soluzione speciale} \\ \text{dell'eq. non omog.}}} + \underbrace{c e^{2t}}_{\substack{\uparrow \text{sol. gen. omogenea}}}$$

Brevesi Non si riesce a trovare una primitiva di $e^{-2t} \cdot \arctan t$ espressa
usando solo funzioni elementari e/o operazioni algebriche
(stesso discorso vale, ad esempio, per e^{t^2}). Questo non vuol
dire che non esiste $F(t)$ tale che $F'(t) = e^{-2t} \cdot \arctan t$.
Una tale funzione esiste, ed è per esempio

$$F(t) = \int_0^t e^{-2s} \cdot \arctan s \, ds$$

Conseguenza: possiamo scrivere la soluzione $u(t)$ dell'eq. diff. come

$$u(t) = e^{2t} F(t) + c e^{2t},$$

dove $F(t)$ è la funzione definita dall'integrale di sopra,

Determino c imponendo $u(0) = \alpha$. Allora

$$\alpha = u(0) = \underbrace{F(0)}_0 + c = c, \text{ quindi } c = \alpha$$

dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = e^{2t} F(t) + \alpha e^{2t} = e^{2t} (F(t) + \alpha)$$

Devo fare $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Per farlo occorre capire $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$. Diventa

$$\int_0^{+\infty} e^{-2s} \cdot \arctan s \, ds$$

Questo integrale improprio ha unico problema
a $+\infty$. Inoltre

$$e^{-2s} \cdot \arctan s \leq e^{-2s} \frac{\pi}{2} \quad \forall s \geq 0$$

Ora $\int_0^{+\infty} e^{-2s} \, ds$ converge (si dimostra con la definizione), dunque

anche $\int_0^{+\infty} e^{-2s} \cdot \arctan s \, ds$ converge ad un certo valore $I \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{2t}}_{+\infty} \{ \underbrace{F(t)}_I + \alpha \} = \begin{cases} +\infty & \text{se } I + \alpha > 0, \text{ cioè } \alpha > -I \\ -\infty & \text{se } I + \alpha < 0, \text{ cioè } \alpha < -I \end{cases}$$

Classico esempio di VALORE SOGLIA: sopra $-I$ la soluzione va a $+\infty$,
sotto $-I$ la soluzione va a $-\infty$,

Cosa succede se $\alpha = I$? Il limite è una forma indeterminata...

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t) + \alpha}{e^{-2t}} = \left[\frac{0}{0} : \text{H\ddot{o}p} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F'(t)}{-2e^{-2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2t} \cdot \arctan t}{-2e^{-2t}} = -\frac{\pi}{4}$$

Dunque per $\alpha = -I$ si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = -\frac{\pi}{4}$.

Esempio 2 Consideriamo l'equazione differenziale $u'' + 25u = \sin(\alpha t)$,
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Domanda: per quali valori di α si ha che tutte le soluzioni del problema sono funzioni limitate (esistono globalmente perché i coeff. non hanno problemi).

Eq. omogenea associata: $u'' + 25u = 0 \leadsto x^2 + 25 = 0 \leadsto x = \pm 5i$
complesse coniugate $\leadsto$ base: $\cos(5t)$, $\sin(5t)$.

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = a \cos(5t) + b \sin(5t)$. Questa cosa, una volta fissati a e b , è limitata perché lo sono $\sin$ e $\cos$.

Senza una sol. dell'eq. non omogenea, la sol. si può cercare del tipo $u(t) = \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$. Indipendentemente da chi scegliamo λ e μ , il contributo di questa parte sarà limitato. Quindi la sol. gen. dell'eq. non omogenea sarà una cosa del tipo

$$u(t) = \underbrace{\lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)}_{\text{dipendente da } \alpha} + \underbrace{a \cos(5t) + b \sin(5t)}_{\text{dipendente dalle cond. iniziali}}$$

Quindi la sol. gen. è sempre limitata --, NON PROPRIO --.

Infatti il tentativo funziona $\Leftrightarrow \alpha \neq 5$. Se $\alpha = 5$ si ha che $\sin(5t)$ è già soluzione dell'omogenea, ed il tentativo non va. In questo caso il tentativo è $u(t) = t \{ \lambda \cos(5t) + \mu \sin(5t) \}$. Ora calcolo λ e μ
 $u'(t) = \lambda \cos(5t) + \mu \sin(5t) + 5t \{ -\lambda \sin(5t) + \mu \cos(5t) \}$
 $u''(t) = -5\lambda \sin(5t) + 5\mu \cos(5t) - 5\lambda \sin(5t) + 5\mu \cos(5t) +$
 $+ 25t \{ -\lambda \cos(5t) - \mu \sin(5t) \}$

Sostituendo nell'eq.

$$u''(t) + 25u(t) = -10\lambda \sin(5t) + 10\mu \cos(5t) = \sin(5t) \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{10}, \mu = 0$$

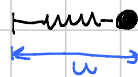
Quindi per $\alpha = 5$ la sol. gen. della non omog. è

$$u(t) = -\frac{1}{10} t \sin(5t) + a \sin(5t) + b \cos(5t)$$

cos: corretto dopo video

e questa soluzione NON è limitata chiunque siano a e b .

Modellino



$$F = ma$$

$$-ku = u''$$

L'equazione di una molla è del tipo $u'' = -ku$, cioè $u'' + ku = 0$

$$u'' + ku = \underbrace{f(t)}_{\text{"spinta"}}$$

Morale: se si vuole ampliare le oscillazioni, bisogna spingere con un periodo legato al periodo proprio della molla.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 107

Titolo nota

16/12/2011

Esempio 1
$$\begin{cases} u'' + 3u' - 4u = 0 \\ u(0) = \alpha \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Determinare per quali $\alpha \geq 0$ la soluzione è limitata per $t \geq 0$.

Eq. lineare omog. a coeff. cost. $\leadsto x^2 + 3x - 4 = 0 \leadsto (x+4)(x-1) = 0$
 $\leadsto x = -4$ e $x = 1 \leadsto$ base: e^{-4t}, e^t .

Sol. gen. $\therefore u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Tale funzione è limitata se e solo se $b = 0$ (altrimenti $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pm\infty$)

Determino a e b in funzione dei dati iniziali

$$\alpha = u(0) = a + b \quad u'(t) = -4a e^{-4t} + b e^t$$

$$0 = u'(0) = -4a + b$$

Ho quindi il sistema
$$\begin{cases} a + b = \alpha \\ -4a + b = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1^a - 2^a: 5a = \alpha \Rightarrow a = \frac{\alpha}{5} \\ \text{Dalla } 1^a: b = \alpha - a = \alpha - \frac{\alpha}{5} = \frac{4}{5}\alpha \end{array}$$

Di conseguenza la soluzione è limitata per $t \geq 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Esempio 2 $u'' + \alpha u' + 27u = 0$

Domanda: per quali valori di α la soluzione è limitata per ogni $t \geq 0$.

Oss. Nel caso $\alpha = 0$ troviamo l'equazione $u'' + 27u = 0$ (la solita molla, "oscillatore armonico"), la cui soluzione generale è

$$u(t) = a \cos(\sqrt{27} t) + b \sin(\sqrt{27} t)$$

la quale è limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$ e non solo per $t \geq 0$.

Ora uno dovrebbe: $\rightarrow$ considerare $x^2 + \alpha x + 27 = 0$ e vedere come sono fatte le radici al variare di α .

A seconda di $\Delta = \alpha^2 - 4 \cdot 27$ le radici saranno reali o complesse.

Caso in cui le radici sono reali e distinte : $x = \lambda$ e $x = \mu$

la soluzione generale sarà

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

L'essere u limitata dipende dal segno di λ e μ . Ora sappiamo che

$\lambda \cdot \mu = 2\tau$ e $\lambda + \mu = -\alpha$ (fatto precorsistico)

stesso segno Se $\alpha > 0$, allora λ e μ sono < 0

Se $\alpha < 0$, allora λ e μ sono > 0

Quindi nel caso di radici reali distinte le soluzioni sono tutte limitate $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

Caso in cui le radici sono reali e coincidenti : $u(t) = a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}$

Ancora una volta la limitatezza dipende dal segno di λ , quindi ancora dal segno di α .

Caso di radici complesse coniugate $x = a \pm i b$. La sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$$

Tale espressione è limitata per $t \geq 0$ se e solo se $a < 0$.

Ricordiamo che la somma delle 2 radici è $-\alpha$, ma è anche $2a$, quindi sol. limitate $\Leftrightarrow a < 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

Quindi anche in questo caso abbiamo sol. lim. per $t \geq 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

Conclusione: in tutti i casi abbiamo trovato che sol. limitate $\Leftrightarrow \alpha \geq 0$ ($\alpha = 0$ considerato a parte prima).

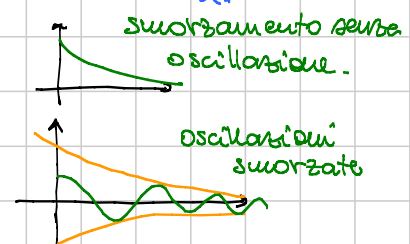
Modellino : $u'' + 2\tau u' + \alpha u = 0$, $u'' = \underbrace{-2\tau u}_{\text{forza che tira indietro}} - \underbrace{\alpha u'}_{\text{termine contrario } (\alpha > 0) \text{ proporzionale alla velocità: attrito dell'aria.}}$

Oss. Differenza tra caso $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$

$\rightarrow \Delta > 0$: esponenziali con esp. neg.

$\rightarrow \Delta < 0$: " " " " per

$\sin$ e $\cos$



Esempio 3 $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Eq. a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = \sin u; \quad \frac{du}{\sin u} = dt$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = t + c$$

↓ si può fare la primitiva, ma poi è difficile ricavare u ...

Obiettivo: capire come è fatta la soluzione senza risolvere esplicitamente.

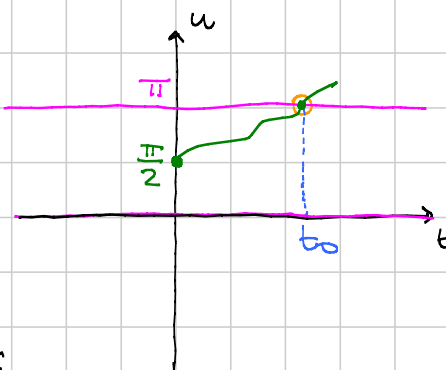
Fatto 1 Se il dato iniziale fosse $u(0) = 0$, allora la soluzione sarebbe $u(t) \equiv 0$. Se il dato iniziale fosse $u(0) = \pi$, allora la soluzione sarebbe $u(t) \equiv \pi$.

Più in generale, tutte le funzioni costanti del tipo $u(t) \equiv k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni dell'equazione.

Fatto 2 La soluzione che parte da $u(0) = \frac{\pi}{2}$, può arrivare a valore 0 oppure π ?

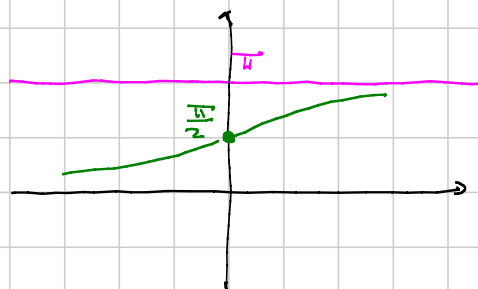
NO!! Se la soluzione arrivasse a π per un certo t_0 , allora il problema di Cauchy con condizioni iniziali $u(t_0) = \pi$ avrebbe almeno 2 soluzioni, il che va contro il teorema di unicità.

Di conseguenza: $0 < u(t) < \pi$ per ogni t per cui la soluzione esiste.



Fatto 3 Poiché $0 < u < \frac{\pi}{2}$, abbiamo che $u'(t) = \sin u(t) > 0$ per ogni t per cui la soluzione esiste, quindi la soluzione è strettamente crescente.

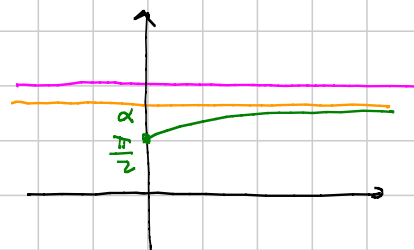
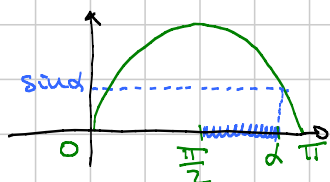
Fatto 4 La soluzione non può avere blow-up, né break-down (sin u è definito ovunque). Dunque ha esistenza globale.



Fatto 5 L'idea è che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pi$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$

Se non tendesse a π (per $t \rightarrow +\infty$), avremmo che esiste un valore $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tale che $\frac{\pi}{2} \leq u(t) \leq \alpha$ per ogni $t \geq 0$

Ma allora $u' = \sin u \geq \sin \alpha > 0$,



Ma allora $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \geq u(0) + \sin \alpha t \rightarrow +\infty$
che è assurdo

Brutalmente: se $u' \geq \sin \alpha > 0$, allora u cresce più di una retta con coeff. angolare $\sin \alpha$ positivo, dunque u deve tendere a $+\infty$.

Analogamente si dimostra che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$.

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 108

Titolo nota

16/12/2011

Esercizio 1 Risolvere $\cos z = i$ (trovare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$).

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \quad (\Leftrightarrow) \quad e^{iz} + e^{-iz} = 2i$$

$w = e^{iz}$ e l'eq. diventa $w + \frac{1}{w} = 2i$, $w^2 - 2iw + 1 = 0$
 La risolvo come eq. di 2° grado (Formula ridotta):

$$w_{1,2} = i \pm \sqrt{-1-1} = i \pm \sqrt{-2} = i \pm \sqrt{2}i = \begin{matrix} \nearrow (1+\sqrt{2})i \\ \searrow (1-\sqrt{2})i \end{matrix}$$

Torno nella variabile z risolvendo

$$e^{iz} = (1+\sqrt{2})i$$

$$e^{iz} = (1-\sqrt{2})i$$

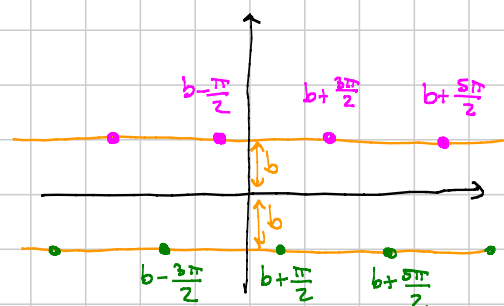
$$z = a + bi$$

$$e^{iz} = e^{ai+bi^2} = e^{-b} \cdot e^{ai} = \underbrace{(1+\sqrt{2})}_{(1+\sqrt{2})i \text{ in forma esponenziale}} e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Quindi $e^{-b} = 1+\sqrt{2}$ $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $b = -\log(1+\sqrt{2})$, $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

La seconda equazione è

$$e^{iz} = (1-\sqrt{2})i$$



Come si scrive $(1-\sqrt{2})i$ in forma esponenziale? $\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{\text{è } < 0 !!!} e^{\frac{\pi}{2}i}$ **NO!!!**

$$(1-\sqrt{2})i = (\sqrt{2}-1)(-i) = (\sqrt{2}-1)e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

Come prima $e^{iz} = e^{-b} \cdot e^{ai} = (\sqrt{2}-1)e^{\frac{3\pi}{2}i}$, da cui

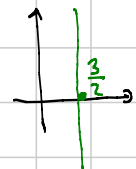
$$e^{-b} = \sqrt{2}-1, \quad b = -\log(\sqrt{2}-1) \quad a = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Oss. $\log(\sqrt{2}-1) = \log\left[(\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right] = \log\frac{1}{\sqrt{2}+1} = -\log(\sqrt{2}+1)$

Quindi il b nella seconda famiglia è l'opposto di quello della 1^a.

Esercizio 2 $z + \bar{z} = 3$ Trovare (e disegnare) tutti gli $z \in \mathbb{C}$ t.c. ...

Forma cartesiana: $z = a+bi$ $z + \bar{z} = 2a = 3$, cioè $a = \frac{3}{2}$
 Le soluzioni sono tutti gli $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}$

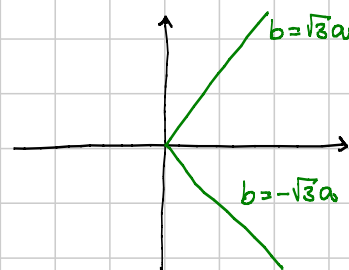


Esercizio 3 $z + \bar{z} = |z|$

Forma cartesiana: $z = a+bi$ $2a = \sqrt{a^2+b^2}$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $z + \bar{z}$ $|z|$

Facciamo i quadrati: $4a^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = 3a^2$, $b = \pm\sqrt{3}a$
 con il vincolo che deve essere $a \geq 0$



Esercizio 4 $z^2 = \bar{z}$

Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

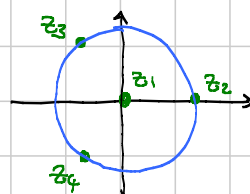
$$\underbrace{\rho^2 e^{2i\theta}}_{z^2} = \underbrace{\bar{\rho} e^{-i\theta}}_{\bar{z}} \quad \begin{cases} \rho^2 = \bar{\rho} \\ 2\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0 \text{ oppure } \rho = 1 \\ 3\theta = 2k\pi, \quad \theta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Quindi $\rho = 0 \leadsto z_1 = 0$

$\rho = 1 \leadsto$ trovo 3 soluzioni dando a k i valori $k=0,1,2$

$$z_2 = 1 \cdot e^{0i} = 1, \quad z_3 = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_4 = 1 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



Approccio quasi equivalente: $z^2 = \mp \bar{z}$. Moltiplico a dx e sx per z :

$z^3 = \mp z\bar{z}$, cioè $z^3 = \mp |z|^2$ che ponendo $z = \rho e^{i\theta}$ diventa

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \mp \rho^2 \quad \text{da cui come prima} \quad \begin{cases} \rho^3 = \mp \rho^2 \\ 3\theta = 2k\pi \end{cases} \quad \text{Sol. come prima.}$$

Esercizio 5 $z^4 = -|\bar{z}|$

Oss. $|\bar{z}| = |z|$

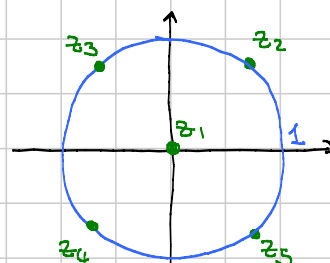
Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

$\underbrace{\rho^4 e^{4\theta i}}_{z^4} = -\rho$ Achtung! $-\rho = \rho e^{i\pi}$ in forma esponenziale

Quindi $\rho^4 e^{4\theta i} = \rho e^{i\pi}$, da cui $\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0 \text{ opp. } \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Conclusione: l'equazione ha 5 soluzioni: $\rho = 0 \leadsto z_1 = 0$,
 $\rho = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

Si potrebbero scrivere in forma cartesiana,
 ma sono come da disegno:



Esercizio 6 $\begin{cases} z + \bar{w} = 0 \\ \bar{z} + |w|w + 6 = 0 \end{cases}$ Trovare le soluzioni con $z \in \mathbb{C}$
 e $w \in \mathbb{C}$.

Ricavo z dalla prima equazione: $z = -\bar{w}$.

Sostituisco nella 2ª equazione, dopo aver osservato che $\bar{z} = \overline{-\bar{w}} = -w$

$$-w + |w|w + 6 = 0 \quad ; \quad w(|w| - 1) + 6 = 0 \Rightarrow w = \frac{-6}{|w| - 1}$$

$\bar{z}$ reale !!!

Essendo w reale lo diciamo x e l'equazione diventa

$$-x + |x| x + 6 = 0 \quad \text{Distinguo 2 casi}$$

- Se $x \geq 0$, l'equazione diventa $-x + x^2 + 6 = 0$, $x^2 - x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{2} \quad \text{e quindi questa non ha soluzioni reali.}$$

- Se $x \leq 0$, l'equazione diventa $-x - x^2 + 6 = 0$, $x^2 + x - 6 = 0$

$$(x+3)(x-2) = 0, \quad \text{da cui } x = -3 \quad \text{oppure } \boxed{x = 2}$$

↓ scartata perché serve $x \leq 0$

In conclusione $w = x = -3$, $z = -\bar{w} = +3$.

L'unica soluzione è $(z, w) = (3, -3)$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 109

Titolo nota

17/12/2011

Oggetto Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ un p.to in cui fare i limiti (tipicamente $x_0 = 0$ oppure $x_0 = +\infty$),
 Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste una funzione $w(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$w(x)$ è limitata in un intorno di x_0 .

Si intende che $f(x)$ e $g(x)$ sono definite almeno in un intorno di x_0 , tranne al più in x_0 .

Esempi Sia $x_0 = 0$. Allora

$$x^2 = O(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Uso la definizione con $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$

$$x^2 = x \cdot x$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x)$ $g(x)$ $w(x)$ è limitata in un intorno di $x=0$

Si ha anche che $\sin x = O(x)$ per $x \rightarrow 0$. Infatti

$$\sin x = x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x)$ $g(x)$ $w(x)$

Devo verificare che $w(x)$ sia limitata in un intorno di $x=0$.

Per farlo ci sono 2 possibilità

① Usare disug. classica $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui

$$|w(x)| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1$$

② Osservare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, quindi $\frac{1}{2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 2$
 per ogni x suff. vicino a $x=0$.

Def. quasi equivalente Se posso dividere per $g(x)$ avremo che $f(x) = O(g(x))$
 se e solo se il rapporto

$$\frac{f(x)}{g(x)} = w(x)$$

Oss. Dire che $f(x) = O(g(x))$ che informazioni dà sul $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Ci dice che è limitato, dunque non può tendere a $\pm\infty$, ma può tendere ad un numero $l \in \mathbb{R}$, oppure non avere limite.

Brutalmente: dire che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire che $f(x)$ "non perde" da $g(x)$

Oss. Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora è anche vero che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

Dim. Se $f(x) = o(g(x))$ vuol dire che $f(x) = g(x) \cdot w(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$.
Ma allora $-1 \leq w(x) \leq 1$ in un intorno di x_0 , quindi è verificata anche la condizione per essere $O(g(x))$.

Esercizio $\arctan(x^2) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$, quindi anche $\arctan(x^2) = O(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

$\arctan(x^2) = O(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Infatti

$\frac{\arctan(x^2)}{x^2} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$, quindi il rapporto è limitato vicino a $x = 0$.

Esempi con $x_0 = +\infty$

$\log(n) = O(n)$ per $n \rightarrow +\infty$

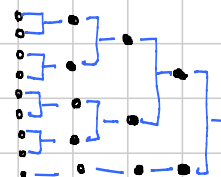
Infatti $\log(n) = \underbrace{n}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{g(x)} \cdot \underbrace{1}_{w(x)}$. Ora $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, quindi è limitato per n grandi.

In realtà si ha pure che $\log n = o(n)$ per $n \rightarrow +\infty$

Esempi "mondo reale". Per decidere la migliore tra n squadre bisogna fare $O(n)$ partite (eliminazione diretta)

Per completare un album di n figurine in media bisogna comprarne $O(n \log n)$

Le partite sono $\frac{n}{2}$ al 1° turno, $\frac{n}{4}$ al 2° turno, $\frac{n}{8}$ al 3° turno e così via.



numero totale punti $\propto \frac{3}{2} + \frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{18} + \dots$

$$= 3 \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{= 1} \right) = 3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

serie geometrica con
ragione $a = \frac{1}{2}$, quindi converge
ad $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Quindi in ogni caso Numero partite $\leq n$, il che implica che Numero partite $= O(n)$.

Oss. se $f(m) \leq g(m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora $f(m) = O(g(m))$

Esercizio delle moto Abbiamo n moto tutte uguali come serbatoio e consumi. Con un pieno ogni moto fa k chilometri.

È possibile fare scole per trasferire carburante da una moto alle altre.

Quale è la max distanza raggiungibile?

Con 2 moto si arriva $\frac{3}{2}k$ con una sosta a $\frac{k}{2}$

Con 4 moto si arriva facilmente a 2k

Con 8 uoto si arriva a $\frac{5}{2}k$

In generale con 2^m moto si arriva a $(\frac{m}{2} + 1)k$
 Quindi con n moto si arriva a $O(\log_2 n)k$

Non è la cosa migliore che si può fare!

La cosa migliore è

- Dopo $\frac{1}{n}$ del percorso resta $\frac{n-1}{n}$ del serbatoio, quindi una moto può dare $\frac{1}{n}$ a ciascuna delle restanti $(n-1)$. In questo modo si arriva a

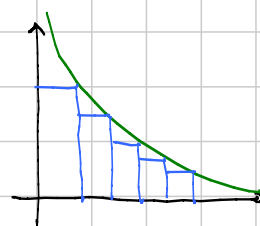
$$k \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

Quanto vale più o meno la sommatoria?

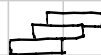
Confronto serie integrali

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \sim \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

$$= [\log x]_1^n = \log n$$



In questo modo: Distanza $\sim k \cdot \log n$.



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 110

Titolo nota

17/12/2011

Test d'esame 2002-1.3

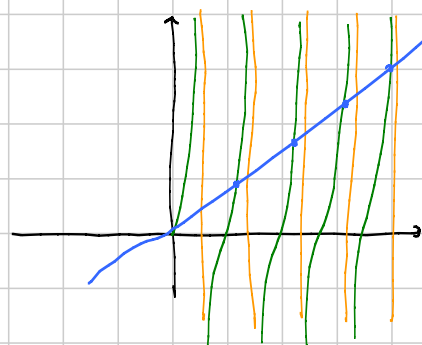
- ①
- $\sin^3 x$
- è una funzione dispari
- V

$$f(-x) = \sin^3(-x) = [\sin(-x)]^3 = [-\sin x]^3 = -\sin^3 x = -f(x)$$

- ②
- $\exists x \geq 2002$
- t.c.
- $\tan x = x$
- V

Sostanzialmente esiste una soluzione in ogni periodo.

Ad essere super rigorosi serve il teo. di esistenza degli zeri in ogni periodo.



- ③
- $\cosh x + \sinh x = e^x$
- V

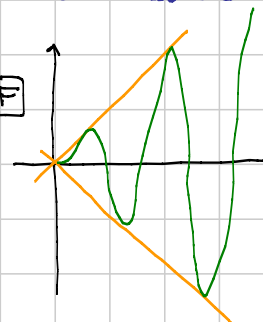
$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \text{ in particolare per } x = 0$$

- ④
- $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 2002 \Rightarrow a_n \rightarrow 2002$
- F

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ per il criterio della radice

- ⑤
- $\exists M \in \mathbb{R}$
- t.c.
- $x \sin x \leq M$
- per ogni
- $x \in \mathbb{R}$
- F

Equivalente a chiedere se $f(x) = x \sin x$ è limitata superiormente



- ⑦
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{200}}$
- converge
- F

Manca condizione necessaria oppure criterio radice

⑧ $u'' + t u^2 = 0$ è eq. diff. lineare F

⑨ $e^{\sin x} = 1 + x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ V

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + o(\sin x) = 1 + x + o(x)$$

$\downarrow$ $\sin x = x + o(x)$

$\downarrow$ $e^t = 1 + t + o(t)$

⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x^3}{3x^2 - 2x^3} = -\frac{3}{2}$ Comandano potenze + grandi (raccolgo x^3).

⑪ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 3x^3}{3x^2 - 2x^3} = \frac{2}{3}$ $\frac{x^2(2+3x)}{x^2(3-2x)} \rightarrow \frac{2}{3}$

⑫ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x^3}{3x^2 - 2x^3} = 5$ Banale sostituzione.

⑬ $\sup \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \int_0^1 \frac{x+1}{x^{2\alpha}} dx \text{ converge} \right\} = \frac{1}{2}$

$$\frac{x+1}{x^{2\alpha}} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}} \text{ converge} \Leftrightarrow 2\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}}$

⑭ $\max \{ 5m - m^2 : m \in \mathbb{N} \} = 6$ massimo valore assunto dalla funzione $5m - m^2$ quando $m \in \mathbb{N}$

$m=0 \rightsquigarrow 0$ $m=1 \rightsquigarrow 4$ $m=2 \rightsquigarrow 6$ $m=3 \rightsquigarrow 6$ $m=4 \rightsquigarrow 4$

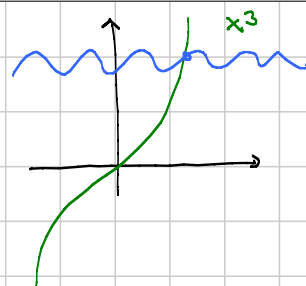
— 0 — 0 —

Test 2004-1.1

① $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[5]{2}$ F $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

② Se $a_n \rightarrow 2004$, allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ V $\sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2004^0 = 1$
 $\downarrow$ no formula indet.

- ③ $x^3 = \sin x + 2004$ ha almeno una soluz. reale. V



- ④ $f(x) = \sin^2(x+3)$ è periodica V

Un possibile periodo è 2π : infatti

$$f(x+2\pi) = \sin^2(x+3+2\pi) = \sin^2(x+3) = f(x)$$

- ⑤ $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$ b.c. $f^x \geq M \quad \forall x \geq k$ V

È la definizione di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^x = +\infty$



- ⑦ $\sin(\sin x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ V sviluppi

- ⑧ $na_n^2 \rightarrow 2004 \Rightarrow \sum a_n$ converge F

Brutalmente: $na_n^2 \sim 2004$, $a_n^2 \sim \frac{2004}{n}$, $a_n \sim \frac{\sqrt{2004}}{\sqrt{n}}$ esp. $< 1 \Rightarrow$ diverge.

Più rigorosamente, prendo $a_n = \frac{\sqrt{2004}}{\sqrt{n}}$ e si ha che il limite fa 2004 e la serie diverge.

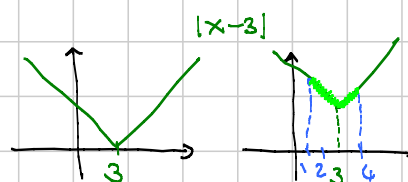
- ⑨ Sol. gen. di $u'' + 4u = 0$ è $u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$ F

$$u'' + 4u = 0 \leadsto x^2 + 4 = 0 \leadsto x = \pm 2i \leadsto u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

- ⑩ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{3x + 5x^2} = \frac{2}{3}$ Raccolgo x

- ⑪ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + x^2}{3x + 5x^2} = \frac{3}{8}$ Banale sostituzione

- ⑫ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^2}{3x + 5x^2} = \frac{1}{5}$ Raccolgo x^2



- ⑬ $\max \{3 + |x-3| : x \in [1,4]\} = 5$ (se la giochiamo $f(1)$ ed $f(4)$)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{16} \quad \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^A \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-2A}}_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Scritto 2007-2 : esercizio 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7 + 2}{n^2 + 7} \arcsin \left(\frac{n^3 + 8}{n^8 + 3} \right) =$$

Brutale: $\sim \frac{n^7}{n^2} \cdot \arcsin \left(\frac{n^3}{n^8} \right) = n^5 \cdot \arcsin \frac{1}{n^5} \sim n^5 \cdot \frac{1}{n^5} = 1$

Rigoroso:

$$\frac{n^7 + 2}{n^2 + 7} \cdot \boxed{\arcsin \left(\frac{\quad}{\quad} \right)} \quad (\quad)$$

↓
1 per cambio variabili
+ limite notevole
— 0 — 0 —

il resto è polinomiale! basta raccogliere le potenze giuste.

2003-2 : Es. 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(1+x-x^2) \cdot \arctan(x^2+x^3)}{\sinh^2 x - x^2} = 3$$

$$\sinh^2 x = \left(x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right)^2 = x^2 + \frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$$

Denominatore: $\frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$

$$\arctan(x^2+x^3) \sim \arctan x^2 \sim x^2$$

$$\log^2(1+x-x^2) \sim \log^2(1+x) \sim x^2$$

Numeratore = $x^4 + o(x^4)$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 111

Titolo nota

17/12/2011

Esercizio 1 Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione

$$x - \int_0^x e^{-t^2} dt = 2011$$

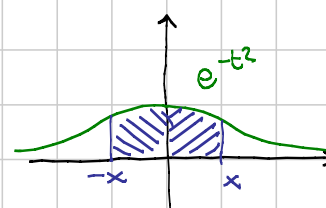
servirebbe il grafico di questa funzione $f(x)$

Studio della funzione $f(x)$.

• Simmetrie $f(-x) = -x - \int_0^{-x} e^{-t^2} dt$

Ho usato che e^{-t^2} è pari e in $\int_0^{-x}$ gli estremi sono "al contrario"

$$\leftarrow = -x + \int_0^x e^{-t^2} dt = -f(x) \Rightarrow \text{dispari}$$



- $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Limiti agli estremi della zona di definizione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \int_0^x e^{-t^2} dt \right] = +\infty$$

Per disparità $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ che è un numero perché converge

Dai soli limiti a $\pm\infty$, più la continuità di $f(x)$ segue che f , vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è surgettiva, quindi l'eq. ha almeno una soluzione reale.

- Per studiare l'unicità studio la monotonia, cioè il segno di $f'(x)$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2}$$

Ora $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0$, cioè sempre.
Inoltre $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0$.

Per monotonia 3 si ha che $f(x)$ è strett. crescente, quindi iniettiva
 $\hookrightarrow (f'(x) \geq 0 \text{ sempre e } f'(x) = 0 \text{ sporadicamente})$

Quindi l'equazione ha soluzione unica.
 — o — o —

Esercizio 2 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \arctan(x^2) \cdot e^{x^3} dx$$

$\hookrightarrow a_n$

Intanto $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$ perché l'integranda è ≥ 0 .

Poi $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ (verrebbe l'integrale tra 0 e 0...), quindi
 c'è la cond. nec. $\Rightarrow$ la serie potrebbe convergere.

Brutale: $\arctan(x^2) \cdot e^{x^3} \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$, quindi

$$a_n \sim \int_0^{\frac{1}{n}} x^2 dx \sim \frac{1}{n^3} \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

Rigoroso: fare confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} \arctan(x^2) \cdot e^{x^3} dx}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \arctan(t^2) \cdot e^{t^3} dt}{x^3}$$

$x = \frac{1}{n}$

$$= \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right] \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x^2) \cdot e^{x^3}}{3x^2} = \frac{1}{3} \neq 0 \neq +\infty$$

$\hookrightarrow 1$

quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, dunque converge.
 — o — o —

Esercizio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{3}{n}} \sin(x^3) \cdot \arctan x \, dx$$

"an"

Con i soliti ragionamenti si arriva a $F(x) = \int_{x^2}^{3x} \sin(t^3) \cdot \arctan t \, dt$

Situazione generale: derivare una funzione del tipo $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \, dt$

Sia $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \, dt$. Calcolare $G'(x)$

Aviamo $F(t)$ la primitiva di $f(t)$, cioè $F'(t) = f(t)$. Allora

$$G(x) = [F(t)]_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x)), \text{ quindi}$$

$$G'(x) = F'(b(x)) b'(x) - F'(a(x)) a'(x) = f(b(x)) b'(x) - f(a(x)) a'(x)$$

Nell'esempio specifico:

$$\left[\int_{x^2}^{3x} \sin(t^3) \cdot \arctan t \, dt \right]' = \underbrace{\sin(27x^3) \cdot \arctan(3x)}_{a'(x)} \cdot \underbrace{3}_{b'(x)} - \sin(x^6) \cdot \arctan x^2 \cdot \underbrace{2x}_{b'(x)}$$

— o — o —

Esercizio 4 Consideriamo la successione

$$x_{n+1} = \int_0^{x_n} \frac{\arctan(t)}{\arctan(2t)} \, dt \quad x_0 = 2011, \quad \text{Studiare } \sum x_n$$

Pongo $f(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{\arctan(2t)} \, dt$

Proprietà di $f(x)$: $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$

$$f'(x) = \frac{\arctan x}{\arctan(2x)} > 0 \text{ per } x > 0 \Rightarrow f \text{ è monotonamente crescente}$$

$$f(x) = \int_0^x \dots < \int_0^x 1 \, dx = x \Rightarrow f(x) \text{ sta sotto la bisettrice}$$

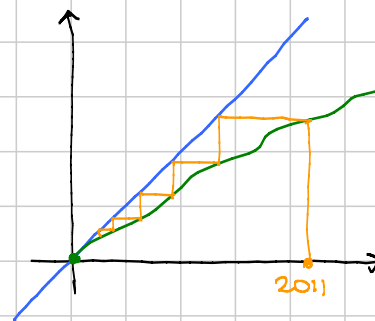
Può ragionevole che $x_n \rightarrow 0$

PIANO: (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$



(i) Induzione + $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

(ii) Ricorrenza + disuguaglianza: $f(x_n) \leq x_n$, cioè $f(x) \leq x$...

(iii) Tes. succ. monotone

(iv) Equazione $l = f(l)$ che si fa con studio di funzione.

Visto che $x_n \rightarrow 0$ la serie potrebbe convergere. La studiamo con il criterio del rapporto, dopo aver osservato che $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right]$$

$\uparrow$
 $x = x_n$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{\arctan(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{1}{2} < 1$$

Quindi la serie converge