

A.A. 2011/2012
Corso di Analisi Matematica I
Stampato integrale delle lezioni
Volume 1

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001: Insiemi - Notazioni, unione, intersezione, differenza, cardinalità, insieme delle parti, prodotto cartesiano	6
Lezione 002: Funzioni tra insiemi. Iniettività, surgettività, funzione inversa, immagine e controimmagine di un insieme	9
Lezione 003: Principio di induzione. Applicazione alla somma dei termini di progressioni aritmetiche e geometriche	13
Lezione 004: Esempi di disuguaglianze dimostrate per induzione. Disuguaglianza di Bernoulli.	17
Lezione 005: Numeri reali: proprietà algebriche, ordinamento, assioma di continuità. Maggioranti, minoranti, massimo, minimo.	21
Lezione 006: Estremo inferiore e superiore: definizioni, caratterizzazioni, esempi .	25
Lezione 007: Interpretazione di iniettività e surgettività in termini di grafico. Operazioni sui grafici di funzioni reali.	28
Lezione 008: Funzioni pari, dispari, periodiche, monotone. Iniettività ed equazioni. Monotonia e disequazioni.	32
Lezione 009: Funzioni elementari: potenze, radici, esponenziali, logaritmi, seno, coseno, tangente	36
Lezione 010: Funzioni trigonometriche inverse. Interpretazione di immagine e controimmagine in termini di grafico ed esercizi relativi.	40
Lezione 011: Proprietà vere definitivamente e frequentemente. Definizione di successione e sue visualizzazioni. Definizioni di limite per successioni.	44
Lezione 012: Esempi di limiti di successioni calcolati usando la definizione. Teoremi di permanenza del segno ed unicità del limite. Teorema del confronto e dei carabinieri. Retta reale estesa.	48
Lezione 013: Fattoriali, binomiali e loro significato combinatorio. Anagrammi di una parola. Proprietà dei binomiali. Binomio di Newton.	52
Lezione 014: Teoremi algebrici per i limiti di successioni. Esempi di limiti calcolati usando teoremi algebrici e di confronto.	56
Lezione 015: Criteri della radice, del rapporto e rapporto $\rightarrow$ radice. Dimostrazione del criterio della radice. Limite della radice n -esima di costanti, polinomi e di $n!$	60
Lezione 016: Esempi di applicazione dei criteri del rapporto e della radice. Confronti tra ordini di infinito di potenze, esponenziali, fattoriali	64
Lezione 017: Esercizi misti sui limiti di successioni utilizzando i criteri visti finora. Esercizi su proprietà di simmetria delle funzioni.	67
Lezione 018: Limiti di funzioni: definizioni	71
Lezione 019: Funzioni continue. Elenco dei limiti di notevoli. Cambio di variabili nei limiti. Esempi di limiti calcolati utilizzando limiti notevoli.	74

Lezione 020: Criterio funzioni $\rightarrow$ successioni. Trucco di passaggio all'esponenziale. Esempi di limiti di funzioni e successioni calcolati mediante limiti notevoli. . .	77
Lezione 021: Discussione delle disuguaglianze $\sin x \leq x \leq \tan x$. Dimostrazione dei principali limiti notevoli. Cambio di variabili per spostare i limiti a 0 oppure $+\infty$	81
Lezione 022: Sottosuccessioni e loro utilizzo per dimostrare la non esistenza di limiti di successioni e funzioni	85
Lezione 023: Successioni monotone e relativo teorema di esistenza del limite. Il numero e (la successione che lo definisce è monotona e compresa tra 2 e 3). . .	89
Lezione 024: Esercizi misti sui limiti che sfruttano le tecniche viste fino a questo momento	93
Lezione 025: Definizione di o piccolo e sue proprietà	97
Lezione 026: Sviluppi e loro utilizzo per il calcolo di limiti	101
Lezione 027: Equivalenza asintotica. Esempi di limiti calcolati usando le tecniche viste finora.	105
Lezione 028: Definizione di rapporto incrementale e di derivata. Significato geometrico. Retta tangente. Relazioni tra derivabilità e continuità.	109
Lezione 029: Derivate di alcune funzioni elementari dimostrate mediante la definizione. Regole di derivazione.	113
Lezione 030: Derivata della funzione inversa. Derivata della composizione. Esempi di calcolo di derivate.	117
Lezione 031: Teorema di De L'Hopital. Esempi in cui si può e non si può applicare. Pericoli dei limiti metà per volta e dell'equivalenza asintotica.	121
Lezione 032: Funzioni iperboliche	125
Lezione 033: Formula di Taylor con resto di Peano: enunciato, idea della dimostrazione, esempi di applicazione	129
Lezione 034: Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari. Sviluppi di Taylor di somma, differenza, prodotto.	133
Lezione 035: Sviluppi di Taylor di funzioni composte	137
Lezione 036: Cautela nel calcolo di polinomi di Taylor di funzioni composte. Esempi di limiti calcolati utilizzando i polinomi di Taylor.	141
Lezione 037: Formula di Taylor con centro in un punto diverso dall'origine. Esercizi riassuntivi sui limiti.	145
Lezione 038: Definizione di serie come limite delle somme parziali. Condizione necessaria e proprietà algebriche. Serie geometriche.	148
Lezione 039: Serie telescopiche. Comportamento delle serie a termini di segno costante. Enunciato dei criteri della radice, del rapporto, del confronto, del confronto asintotico (caso standard). Serie armoniche generalizzate.	152
Lezione 040: Esercizi sulla convergenza di serie a termini positivi (non negativi) .	156
Lezione 041: Dimostrazione dei criteri per serie a termini positivi. Casi limite di confronto asintotico ed esempi di applicazione.	160
Lezione 042: Serie a termini di segno qualunque: enunciato del criterio di Leibnitz e dell'assoluta convergenza ed esempi di applicazione	164
Lezione 043: Dimostrazione dei criteri di Leibnitz e dell'assoluta convergenza. Serie di potenze: notazioni, raggio di convergenza e formula per calcolarlo.	168

Lezione 044: Serie di potenze: dimostrazione della formula per il calcolo del raggio di convergenza. Serie di Taylor e loro utilizzo per il calcolo della somma di speciali serie numeriche.	172
Lezione 045: Teorema di esistenza degli zeri e dei valori intermedi. Esempi di applicazione.	176
Lezione 046: Studio locale di funzioni e criterio delle derivate successive per lo studio dell'andamento di una funzione nell'intorno di un punto stazionario . .	180
Lezione 047: Teorema di Weierstrass e sue varianti. Ricerca operativa dei punti di max e di min.	184
Lezione 048: Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange	188
Lezione 049: Dimostrazione del caso $0/0$ del teorema di De L'Hopital. Legami tra segno della derivata in un intervallo e monotonia di una funzione.	192
Lezione 050: Esercizi misti su serie parametriche	196
Lezione 051: Esercizi misti su successioni, serie, polinomi di Taylor, studio locale di funzioni	199
Lezione 052: Primo esempio di studio globale di funzioni. Asintoti e loro equazioni.	202
Lezione 053: Esempi di studio di funzioni	206
Lezione 054: Formula di Taylor con resto di Lagrange e applicazioni (calcolo approssimato di funzioni, dimostrazione di disuguaglianze)	210
Lezione 055: Convessità e legami con il segno della derivata seconda. Disuguaglianze classiche.	214
Lezione 056: Lipschitzianità e legami con la derivata prima	218

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 001

Titolo nota

28/09/2011

INSIEMI Nessuna definizione formale
 $a \in A$ $A \ni a$
 ↓ elem. → insieme

 a è un elemento di A
 a appartiene ad A
 $a \notin A$ $A \not\ni a$
 a non appartiene

Presentazione di un insieme:

1° modo: per elenco

$$A = \{a, d, 7, 15, *, \square\}$$

Per convenzione gli el. ripetuti contano una sola volta

$$A = \{a, d, 7, a, 15, *, \square, \square, *, *\}$$

← stessa cosa

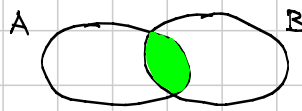
2° modo: per proprietà

$$B = \{\text{studenti di TLC in F03}\}$$

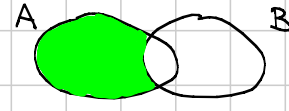
$$C = \{\text{interi positivi dispari}\}$$

Inclusione: $A \subseteq B$
 A contenuto dentro B , cioè tutti gli elementi di A sono anche elementi di B .
 $A \subset B$ A contenuto in B , ma non uguale cioè→ ogni elemento di A è anche elemento di B → esiste almeno un elemento di B che non sta in A
 $A \subset B$: da non usare MAI perché ambiguo (usato in testi diversi con significato diverso)
Operazioni tra insiemi: $A \cup B$

UNIONE

 $A \cap B$

INTERSEZIONE

 $A \setminus B$

DIFFERENZA

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

↑
tali che

OR

: almeno una delle condizioni

VEL ($\vee$) deve essere vera.

$$A \cap B = x : x \in A \text{ e } x \in B$$

AND ($\wedge$) : Le condizioni devono essere entrambe vere.

$$A \setminus B = x : x \in A \text{ e } x \notin B$$



$$x : x \in A \text{ XOR } x \in B$$

XOR
AUT → una e una sola delle condizioni deve essere vera

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Insieme delle parti Dato un insieme A , si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A

$$\mathcal{P}(A) = B : B \subseteq A$$

Esempio $A = \{2, a, *\}$ (Per elenco)

$$\mathcal{P}(A) = \{ \{2, a, *\}, \{2, a\}, \{2, *\}, \{a, *\}, \{2\}, \{a\}, \{*\}, \emptyset \}$$

↑
insieme vuoto

Osservazione: sia A l'insieme di sopra

$$2 \in A$$

OK

$$2 \subseteq A$$

NO perché $\subseteq$ vuole a lato 2 insieme

$$\{*, 2\} \subseteq A$$

$$\{2, *\} \subseteq A$$

OK: sottoinsiemi di A

$$\{*, 2\} \in A$$

NO! ci vuole

el e insieme

$$\{2\} \subseteq A$$

OK: l'insieme che contiene solo 2 è contenuto dentro A

(lo stesso perché negli elenchi l'ordine non conta)

$\{2\} \in \mathcal{P}(A)$: l'insieme che contiene 2 è contenuto nelle parti di A .

$\{2, a\} \in \mathcal{P}(A)$: OK

$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ OK

$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$: OK (il vuoto è contenuto ovunque)

Prodotto cartesiano di 2 insiemi Siano A e B due insiemi.
 Si definisce prodotto cartesiano $A \times B$ l'insieme delle coppie
 (a, b) ORDINATE (cioè $(a, b) \neq (b, a)$) in cui $a \in A$, $b \in B$.

Esempio $A = \{7, *\}$ $B = \{0, 3, m\}$

$$A \times B = \{(7, 0), (7, 3), (7, m), (*, 0), (*, 3), (*, m)\}$$

$$A \times A = \{(7, 7), (7, *), (*, 7), (*, *)\}$$

diversi ↙

Notazione Con $|A|$ (e talvolta anche $\#A$) si intende il
 numero di elementi dell'insieme A .

Nell'esempio precedente $|A| = 2$, $|B| = 3$, $|A \times B| = 6$
 $|A \times A| = 4$, $|B \times B| = 9$.

Esercizio (Hard) Calcolare $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))|$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 002

Titolo nota

28/09/2011

Esempio $A = \{3, 5, \square\}$ $\{5, 3\} \subseteq A$ OK
 $\{5, 3\} \in \mathcal{P}(A)$ OK
 $\{5, 3\} \subsetneq A$ OK

$7 < 10$ OK $7 \leq 10$ OK $10 \leq 10$ OK
 — o — o —

FUNZIONI (TRA INSIEMI)

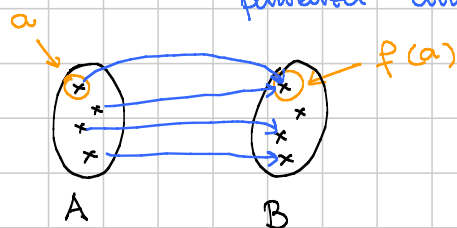
Def. rigorosa di funzione: non la dico

Operativamente una funzione sono 3 cose:

- ① un insieme di partenza
- ② un insieme di arrivo
- ③ una legge che ad ogni elemento dell'insieme di partenza associa un UNICO elemento dell'insieme di arrivo.

Notazione $f: A \rightarrow B$
 ↑ partenza ↑ arrivo

$f(a)$ elemento di B che la legge associa ad a.
 ↑
 elemento di A



Funzioni INIETTIVE, SURGETTIVE, BIGETTIVE, INVERTIBILI

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Si dice che f è

- INIETTIVA se brutalmente due qualunque elementi distinti di A vanno a finire in elementi distinti di B

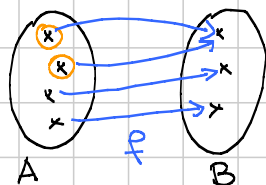
Rigorosamente: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ oppure
 $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

- **SURGETTIVA** $\times$ ogni elemento di B è raggiunto da una freccia
Rigorosamente:

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad ! f(a) = b$$

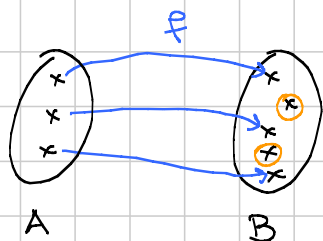
$\downarrow$ per ogni $\downarrow$ esiste almeno un $\downarrow$ tale che

Esempi



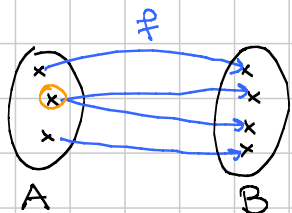
Surgettiva SI: ogni el. di B è raggiunto

Iniettiva NO: esistono 2 elementi distinti in partenza che vanno a finire nello stesso elemento di B .

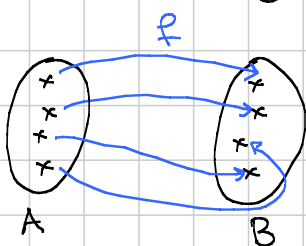


Iniettiva SI: elementi diversi vanno in elementi diversi

Surgettiva NO: due elementi di B non vengono raggiunti



Non è una funzione: da un p.to non possono partire 2 frecce!!



Sia iniettiva, sia surgettiva.

INIETTIVA + SURGETTIVA = BIGETTIVA

Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice INVERTIBILE se esiste $g: B \rightarrow A$ tale che

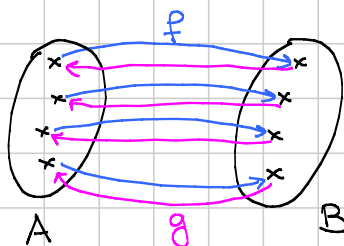
$$g(f(a)) = a$$

$$f(g(b)) = b$$

punto da $b \in B$ e faccio prima g e poi f .

$$\forall a \in A \quad \leftarrow \text{punto da } a \text{ e faccio prima } f \text{ e poi } g$$

$$\forall b \in B$$



Fatto generale Sia $f: A \rightarrow B$. Allora esiste la funzione inversa $g: B \rightarrow A$ se e solo se f è iniettiva e surgettiva.

Insiemi numerici: notazioni

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$\mathbb{N}$ = numeri naturali, 0 incluso = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = numeri interi (relativi) = $\{0, +1, -1, +2, -2, +3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali = frazioni $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$\mathbb{R}$ = numeri reali

$\mathbb{C}$ = numeri complessi

Esempio 1 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f(n) = n+3$

iniettiva: SÌ se $n_1 \neq n_2$, allora $n_1+3 \neq n_2+3$

surgettiva: NO infatti 0, 1, 2 sono elementi dell'insieme di arrivo che non provengono da nessun elemento in partenza.

Esempio 2 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $f(n) = n+3$

Questa è sia iniettiva, sia surgettiva, dunque bigettiva, dunque invertibile. L'inversa è $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $g(n) = n-3$

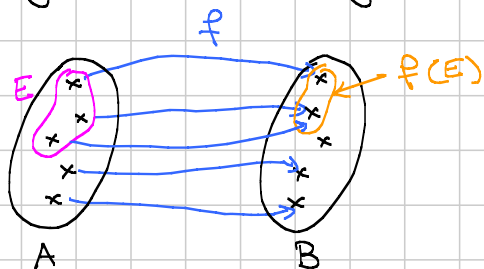
Esempio 3 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f(n) = n^2$

Iniettiva: SÌ Surgettiva NO: ad esempio 2 non è raggiunto da nessuna freccia.

Esempio 4 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $f(n) = n^2$

Iniettiva: NO infatti $f(-5) = f(5) = 25$, quindi ho 2 elementi diversi in partenza che vanno a finire nello stesso.

Immagine e controimmagine.



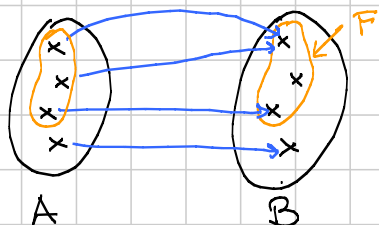
Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.

Dato un sottoinsieme $E \subseteq A$ si definisce immagine di E l'unione di tutti gli elementi di B che sono raggiunti da frecce che partono da E . Rigorosamente

$$f(E) = \{f(a) : a \in E\} \quad \text{ELENCO!!!}$$

Dato un sottoinsieme $F \subseteq B$ si definisce controimmagine di F l'insieme di tutti gli elementi di A che vanno a finire in F .

Rigorosamente



$$f^{-1}(F) = \{a \in A : f(a) \in F\} \subseteq A$$

PROPRIETÀ

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 003

Titolo nota

29/09/2011

PRINCIPIO DI INDUZIONE $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Insiduiamo con P_n una proprietà dei numeri interi ≥ 0 , cioè una frase con dentro un parametro n , che a seconda del valore di n può essere VERA o FALSA

Esempi

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$2^n \geq n + 5$$

Principio di induzione: metodo per dimostrare che una certa P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

(i) P_0 è vera (cioè P_n è vera quando metto $n=0$)

(ii) se per un certo $n \in \mathbb{N}$ si ha che P_n è vera, allora anche P_{n+1} è vera.

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Di solito (i) si chiama PASSO BASE, (ii) si chiama PASSO INDUTTIVO (il passaggio da un valore di n al successivo).

Brutalmente perché funziona? P_0 è vera per la (i). Uso la (ii) con $n=0$ "se P_0 è vera, allora è vera P_1 ". Po so che è vera, quindi è vera P_1 .

Uso la (ii) con $n=1$. Essendo P_1 vera, sarà vera anche P_2 .

Essendo P_2 vera, è vera anche P_3 , e così via.

Achtung! Quando dim. la (ii) ho come ipotesi che P_n è vera e come tesi che P_{n+1} è vera.

Tessere del domino

Il passo base equivale a far cadere la tessera P_0

Il passo induttivo equivale al meccanismo di caduta: se cade una tessera, allora cade la successiva.

Variazione: supponiamo che

(i) P_7 è vera

(ii) se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.

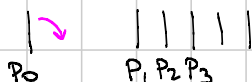
Allora P_n è vera per ogni $n \geq 7$. Non posso dire nulla sulle P_n con $0 \leq n \leq 6$ (dovrei sostituire i valori)

Variazione 2: supponiamo che

(i) P_0 è vera

(ii) se $n \geq 1$ e P_n è vera, allora P_{n-1} è vera.

Allora non si può dire nulla perché il meccanismo di caduta funziona solo da 1 in poi



In questo caso, se voglio dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ devo dimostrare un secondo passo base, e cioè che P_1 è vera.

Esempio 1 $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$

Passo Base $n=1$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. OK

Passo Induttivo ($n \Rightarrow n+1$) Ipotesi $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (P_n vera)

Tesi: $1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (P_{n+1} vera)

↑
stessa cosa con $(n+1)$
al posto di n

Dim. P.I. Catena di uguaglianze

$$1+2+\dots+(n+1) \stackrel{\text{PCM}}{=} [1+2+\dots+n] + (n+1)$$

$$\stackrel{\text{uso ipotesi induttiva}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \stackrel{\text{PCM}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dunque il 1° termine della catena di uguaglianze è uguale all'ultimo, il che è proprio la tesi del passo induttivo.

Esempio 2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1.$

Passo base: $n=1$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Ok

Passo induttivo. Ipotesi: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesi: $1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ← stessa cosa di sopra, con $n+1$ al posto di n

Dim. passo induttivo

uso Hp induttiva

$$[1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + (n+1)^2 \stackrel{\text{PCM}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} (n+1) \cdot \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$

$$\stackrel{\text{PCM}}{=} (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

Osservazione L'induzione permette di dimostrare rigorosamente una formula trovata in altro modo. Non dà nessuno strumento per scoprire l'uguaglianza da dimostrare.

Esempio 3 $1+a+a^2+a^3+\dots+a^m = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \quad \forall m \geq 0$
 $\forall a \neq 1$

Passo base: $m=0$ A sx viene 1. A dx viene $\frac{a-1}{a-1} = 1$. Ok
 (Ho usato già che $a \neq 1$)

Passo induttivo $m \Rightarrow m+1$

Ipotesi: $1+a+a^2+\dots+a^m = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}$

Tesi: $1+a+a^2+\dots+a^{m+1} = \frac{a^{m+2}-1}{a-1}$

Dim. passo induttivo: catena di uguaglianze

$$\begin{aligned}
 [1+a+a^2+\dots+a^m] + a^{m+1} &\stackrel{\text{uso Hp}}{=} \frac{a^{m+1}-1}{a-1} + a^{m+1} \\
 &= \frac{\cancel{a^{m+1}} - 1 + \cancel{a^{m+1}} + a^{m+2} - \cancel{a^{m+1}}}{a-1} = \frac{a^{m+2}-1}{a-1}
 \end{aligned}$$

Oss.1 Cosa succede nell'esempio 3 se $a=1$?

$$1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^m = m+1 \quad (\text{solo } m+1 \text{ termini tutti uguali ad } 1)$$

Oss.2 Come può venire in mente la formula dell'esempio 1?

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

Sommando:

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

Dividendo per 2 ho la formula per S.

Nell'esempio 3 basta pensare alle fattorizzazioni:

$$a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1), \quad a^4-1 = (a-1)(a^3+a^2+a+1), \dots$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 004

Titolo nota

29/09/2011

Esempio 1 Dimostrare che $3^n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.Passo base $n=0$: $3^0 \geq 0$ $1 \geq 0$ ok.Passo induttivo $[n \Rightarrow n+1]$ Ipotesi : $3^n \geq n$ Tesi : $3^{n+1} \geq n+1$ Dim. passaggio induttivo : catena di uguaglianze e disuguaglianze (tutte dalla stessa parte)

$$\begin{array}{ccccccc}
 3^{n+1} & = & 3 \cdot 3^n & \geq & 3n & \geq & n+1 \\
 \uparrow \text{PCM} & & & \uparrow \text{Uso Hp} & & \uparrow \text{spero che} & \\
 & & & \text{moltiplicata} & & \text{sia vero} & \\
 & & & \text{per 3} & & &
 \end{array}$$

Controllo la speranza: $3n \geq n+1$, $2n \geq 1$, $n \geq \frac{1}{2}$
 Essendo n intero è come dire $n \geq 1$.

Quindi : speranza ok per $n \geq 1$, quindi catena di disug. ok
 per $n \geq 1$, quindi pass. induttivo ok per $n \geq 1$, quindi
 è così!

$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \end{array}$

Per completare la dimostrazione devo fare a mano il caso $n=1$

$$\begin{array}{ccc}
 [n=1] & 3^1 \geq 1 & 3 \geq 1 \quad \text{Ok} \\
 & \underline{\quad 0 \quad} & \underline{\quad 0 \quad}
 \end{array}$$

Definizione di fattoriale $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ($0! = 1$)Definizione ricorsiva:

(i) $0! = 1$

(ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$
 $\underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad 0 \quad}$

Esempio 2 Disuguaglianza di BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1.$$

Passo base $n=0$ A sx viene 1, A dx viene 1, quindi OK

Passo induttivo $n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$
 Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. P.I.: catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &\stackrel{\text{PCM}}{=} (1+x) \cdot (1+x)^n \\
 &\stackrel{\text{uso Hp induttiva}}{\geq} (1+x) \cdot (1+nx) \\
 &\stackrel{\text{PCM}}{=} 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x + \boxed{nx^2} \stackrel{\geq 0: \text{ se lo tolgo la somma scende}}{\geq} 1+(n+1)x.
 \end{aligned}$$

Quindi il 1° termine è $\geq$ dell'ultimo, il che è proprio la tesi del passo induttivo.

Quali ipotesi ho usato su x ? Dall'ipotesi induttiva ho dedotto che

$$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x) \cdot (1+nx)$$

cioè ho preso l'Hp induttiva e l'ho moltiplicata per $(1+x)$ conservando i versi della disuguaglianza. Questo si può fare solo se si moltiplica per roba ≥ 0 , cioè solo se $1+x \geq 0$, cioè solo se $x \geq -1$.

Quindi il passo induttivo, e di conseguenza la dimostrazione, funziona solo per $x \geq -1$.

Per gli altri valori di x può essere vero o no, ma non l'ho dimostrato!

— o — o —

Osservazione. Se uso Bernoulli con $x=1$ ottengo $2^n \geq n+1$

Esempio 3 Per quali valori di n si ha che $n! \geq 2^n$?

Esperimenti :

$n=0$	$1 \geq 1$	OK	$n=3$	$3! = 6 \geq 8$	NO
$n=1$	$1 \geq 2$	NO	$n=4$	$4! = 24 \geq 16$	SI
$n=2$	$2 \geq 4$	NO	$n=5$	$5! = 120 \geq 32$	SI

Idea: la disuguaglianza è vera per $n=0$ e poi per $n \geq 4$.

Dim. a mano (per sostituzione) fino a $n=4$ e poi per induzione

Passo base : $n=4$ fatto sopra : $24 \geq 16$ OK.

Passo induttivo : Ipotesi : $n! \geq 2^n$ Tesi : $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim. P.I. Catena di uguaglianze e disuguaglianze

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^n \geq 2^{n+1}$$

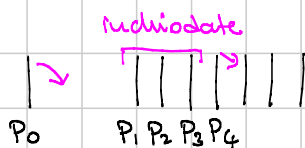
$\uparrow$ Def. ricorsiva di fattoriale $\uparrow$ Hp induttiva moltiplic. per $n+1$ che è ≥ 0 , quindi conservo i versi $\uparrow$ speranza

Controllo la speranza: $(n+1) \cdot 2^n \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}$
 $(n+1) \cdot 2^n \stackrel{?}{\geq} 2 \cdot 2^n$ (occluso: $2^n > 0$, quindi posso semplif.)
 $n+1 \stackrel{?}{\geq} 2$
 $n \geq 1$.

Quindi speranza OK per $n \geq 1$, quindi P.I. OK per $n \geq 1$, e a noi in questo caso bastava OK per $n \geq 4$. Quindi la dim. è completa.

— o — o —

Oss. Come sono le tessere del domino nell'esempio 3 ?



Il meccanismo di caduta funziona: rebbi da 1 in poi, ma le tessere 1, 2, 3 non cadono. Tutto parte solo da 4.

Esempio 4 Per quali n è vero che $2^n + 3^n \leq 4^n$?

Esperimenti: $n=0$: $2 \leq 1$ NO

$n=1$: $5 \leq 4$ NO

$n=2$: $13 \leq 16$ SI

$n=3$: $35 \leq 64$ SI

Idea: P_n è vera
per ogni $n \geq 2$.

Passo base $n=2$: OK

Passo induttivo $n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $2^n + 3^n \leq 4^n$

tesi: $2^{n+1} + 3^{n+1} \leq 4^{n+1}$

Dim. P.I. : catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
 4^{n+1} &\stackrel{\text{PCM}}{=} 4 \cdot 4^n \geq 4 \cdot (2^n + 3^n) \stackrel{\text{PCM}}{=} 4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \\
 &\quad \uparrow \text{uso Hp. induttiva} \quad \downarrow \text{ottengo roba + piccola} \\
 &\quad \text{moltiplicata per 4} \quad \geq 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \\
 &\quad \quad \quad = 2^{n+1} + 3^{n+1}
 \end{aligned}$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 005

Titolo nota

30/09/2011

NUMERI REALI $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

- Proprietà algebriche
- Proprietà di ordinamento
- Assioma di continuità

PROPRIETÀ ALGEBRICHE su $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di somma e prodotto, con queste proprietà:

- (S1) $a+b = b+a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$ (commutativa)
- (S2) $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$ (associativa)
- (S3) $\exists 0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (elemento neutro)
- (S4) $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a+b = 0$ (esistenza opposto o inverso rispetto alla somma) *NO in $\mathbb{N}$*
 $(b = -a)$
- (P1) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall \dots$
- (P2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall \dots$
- (P3) $\exists 1 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- (P4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } ab = 1$ (esistenza dell'inverso rispetto al prodotto) *NO in $\mathbb{N} \text{ e } \mathbb{Z}$*
 $(b = \frac{1}{a})$
- (D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (distributiva)

Esempio $3x + 2 = 7$ Aggiungo a dx e sx l'inverso di 2 rispetto alla somma

$$3x + \underbrace{2 + (-2)}_{=0} = 7 + (-2)$$

$$3x = 5 \quad \text{Moltiplico a dx e sx per l'inverso moltiplicativo di 3}$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)}_1 \cdot x = 5 \cdot \frac{1}{3} \quad x = \frac{5}{3}$$

PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO Se x e y sono numeri reali, allora vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$, con queste proprietà

(O1) $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(riflessiva)

(O2) se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$

(antisimmetrica)

(O3) se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$

(transitiva)

Collegamento con operazioni algebriche

(O5) se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

(O6) se $x \leq y$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z \quad \forall z \geq 0$

(O6') se $x \leq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \leq 0$

↑ si scambia il verso

Esempio

$$7 - 2x \leq 10$$

Per (O5) aggiungo -7 a dx e sx

$$-7 + 7 - 2x \leq 10 - 7$$

Uso proprietà della somma

$$-2x \leq 3$$

Moltiplico per $-\frac{1}{2}$ e grazie a (O6')

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

scambio i versi

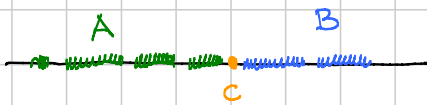
Achtung! Da non fare mai: moltiplicare per roba di cui non si conosce il segno

$$\frac{x+1}{2x-3} \geq 2 \quad \text{NO} \quad x+1 \geq 2(2x-3)$$

Non conosco il segno di $2x-3$

— o — o —

ASSIOMA DI CONTINUITÀ



Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che

A sia tutto a sx di B , cioè

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \quad \forall a \in A$$

$$c \leq b \quad \forall b \in B.$$

Oss. • $A \cap B$ è $\emptyset$ oppure ha un solo elemento, che è proprio il c

• c non è obbligato ad essere unico (potrebbe esserci un "buco" tra A e B)

• c può essere unico anche se $A \cap B = \emptyset$ (es: $A = x < 0$ $B = x > 0$)

Osservazione L'assioma di continuità vale in $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$.

Ad esempio prendo

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \geq 2\}$$

È abbastanza chiaro che A sta a tutto a sx di B .

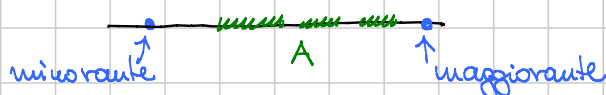
Un eventuale separatore c dovrebbe avere $c^2 = 2$. Tuttavia in $\mathbb{Q}$ non esiste nessun c t.c. $c^2 = 2$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), mentre esiste in $\mathbb{R}$.

Definizioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

Si dice che un numero reale $k \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$k \geq a \quad \forall a \in A$$

Si dice che $k \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se $k \leq a \quad \forall a \in A$.



Oss. ① Maggioranti e minoranti non sono obbligati ad esistere (se $A = \mathbb{N}$, allora non esistono maggioranti e -22 è un minorante, se prendo $A = \mathbb{Z}$, allora non ci sono né maggioranti, né minoranti)

② Quando esistono, non sono mai unici (se k è maggiorante, allora lo sono tutti i numeri $\geq k$)

L'insieme A si dice

- limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante (dunque ne esistono infiniti)
- limitato inferiormente se ... minorante
- limitato se è contemporaneamente limitato inferiormente e superiormente.

Oss. $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|a| \leq k \quad \forall a \in A$$

(cioè $-k \leq a \leq k$)

Def. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A e si scrive $M = \max A$ se

(i) $a \leq M \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante)

(ii) $M \in A$ (cioè M appartiene ad A)

Analogamente, $m = \min A$ se

(i) $a \geq m \quad \forall a \in A$

(ii) $m \in A$.

Oss. ① $\max$ e $\min$ non sono obbligati ad esistere, nemmeno se l'insieme è limitato. Ad esempio $(0,1)$ (intervallo senza estremi) è limitato, ma non ha né $\max$, né $\min$.

② Se $\max$ e/o $\min$ esistono, allora sono per forza unici (dimostrarlo!)

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 006

Titolo nota

30/09/2011

ESTREMO INFERIORE E SUPERIORE Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

L'estremo superiore di A si indica con $\sup A$ ed è

- $+\infty$ se A non è limitato superiormente, cioè se non esistono maggioranti
- il minimo dei maggioranti se A è lim. superiormente.

Analogamente

- $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente
- $\inf A =$ massimo dei minoranti altrimenti.

Esempi

① $\mathbb{N}$: $\sup = +\infty$, max. N.E., $\min = 0$, $\inf = 0$

(i minoranti sono tutti i reali $x \leq 0$)

② $\mathbb{Z}$: $\sup = +\infty$, max N.E., $\min = \text{N.E.}$, $\inf = -\infty$

③ $(2, 5]$ $\sup = 5$, $\max = 5$, $\min = \text{N.E.}$, $\inf = 2$

(i maggioranti sono tutti i reali $x \geq 5$, i minoranti sono tutti i reali $x \leq 2$)

Oss. ① Se esiste $M = \max A$, allora M è anche $\sup A$ (idem per $\inf$)

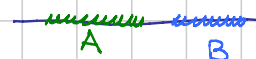
② Se $L = \sup A$ e $L \in A$, allora $L = \max A$ (idem per $\inf$)

③ Estremo inferiore e superiore sono obbligati ad esistere
(reali $0 \neq \infty$) e sono unici.
— 0 — 0 —

Teorema Se $A \neq \emptyset$, allora $\sup A$ esiste per forza.

Dim. Se A non è limitato superiormente, allora $\sup A = +\infty$ per definizione.

Supponiamo che A sia limitato superiormente, e indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A .



So che $B \neq \emptyset$ e devo dimostrare che esiste il $\min B$.

Ora B sta tutto a dx di A perché gli elementi di B sono maggioranti. Allora per l'assioma di continuità $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (c è un maggiorante, cioè $c \in B$)

(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo di tutti gli el. di B)

Dalla (i) e (ii) si deduce che $c = \min B$.

Esercizio Ripetere la dim. adattandola al caso dell'inf.

Caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$.

① $\sup A = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$



Comunque io scelga l'insieme A , visto il valore di M , tira fuori un elemento $a \geq M$.

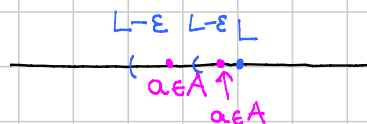
② $\inf A = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ t.c. $a \leq M$

③ $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (questo dice che L è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \geq L - \varepsilon \quad a \in A$

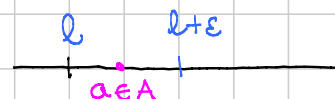
Comunque io mi sposti un po' a sx di L , anche di pochissimo, c'è un elemento $a \in A$ più grande del punto in cui mi sono spostato.



④ $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se

(i) $l \leq a \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.c. $a \leq l + \varepsilon$



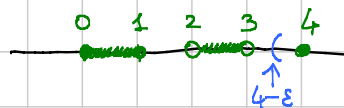
Esempi $A = \{3\}$. Allora

$$\inf A = \min A = \max A = \sup A = 3$$

I maggioranti sono tutti i reali $x \geq 3$

I minoranti " " " $x \leq 3$

$$A = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$$



$$\inf = \min = 0$$

$$\sup = \max = 4$$

I maggioranti sono tutti i reali ≥ 4

I minoranti " " " ≤ 0 .

Caratterizzazione del sup in questo esempio $L = 4$

$$(i) a \leq 4 \quad \forall a \in A$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ t.c. } a \geq 4 - \varepsilon \quad \text{Questo } a \text{ è sempre } 4.$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\} \quad \text{Descrizione per proprietà}$$

Risolvere la disequazione e trovo che $A = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, quindi

$$\inf A = -\sqrt{3}, \quad \sup = \sqrt{3}, \quad \max \text{ e } \min \text{ N.E.}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 < 3\}$$

In questo caso $\inf B = \min B = 0$, $\max B = \sup B = 1$

perché $B = \{0, 1\}$ (insieme costituito da 2 elementi)

$$C = \{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{Descrizione per elenco}$$

$$C = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\} \quad \inf = \min = 0, \quad \sup = +\infty, \quad \max \text{ N.E.}$$

$$D = \{n^2 : n \in \mathbb{Z}, n > 3\} \quad \inf = \min = 16, \quad \sup = +\infty, \quad \max \text{ N.E.}$$

$$D = \{16, 25, 36, \dots\}$$

↑ quadrati di interi $n > 3$, cioè □ di interi $n \geq 4$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 007

Titolo nota

30/09/2011

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Si dice grafico di f il sottoinsieme del prodotto $A \times B$ definito da

$$\begin{aligned} \text{grafico}(f) &= \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \quad \text{Per proprietà} \\ &= \{(a, f(a)) : a \in A\} \quad \text{stessa cosa per elenco.} \end{aligned}$$

Nel caso di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se

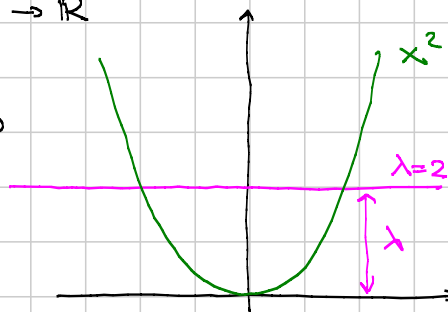
- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha al massimo una soluzione (se l'equazione avesse almeno 2 soluzioni distinte, esisterebbero 2 valori distinti della x con la stessa immagine)
- equivalentemente, se il grafico di $f(x)$ incontra ogni retta parallela all'asse x in al più un punto.

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva se e solo se

- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione
- equivalentemente, se il grafico di $f(x)$ incontra ogni parallela all'asse x in almeno un punto.

Esempio 1 $f(x) = x^2$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- non è iniettiva perché esistono parallele all'asse x che incontrano il grafico in 2 p.ti
- non è surgettiva perché esistono parallele che non incontrano (quelle con $\lambda < 0$)



Esempio 2 $f(x) = x^2$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$.

Per via dell'insieme di arrivo sono vietati i $\lambda < 0$. Considero solo le parallele all'asse x con $\lambda \geq 0$.

Ora è surgettiva, ma non iniettiva.

Esempio 3 $f(x) = x^2$, vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Ora considero tutte le rette $y = \lambda$, ma guardo solo le intersezioni con $x \geq 0$.

Ora è iniettiva, ma non surgettiva.



Esempio 4 $f(x) = x^2$, vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

Ora è iniettiva e surgettiva, dunque invertibile.

La funzione inversa è una $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ed è

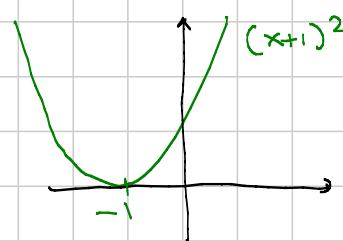
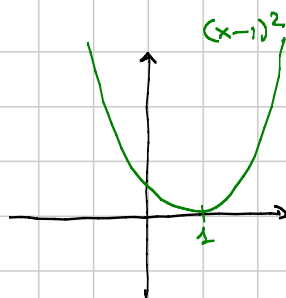
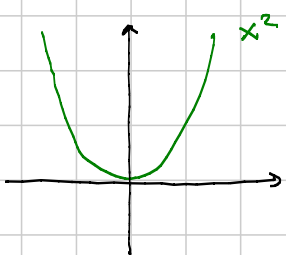
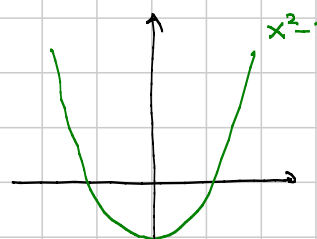
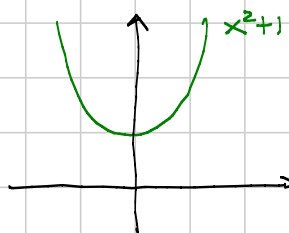
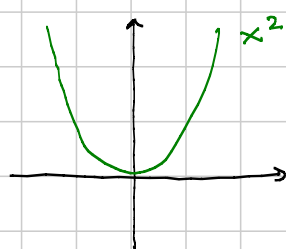
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Oss. La radice prende in input valori ≥ 0 e restituisce valori ≥ 0 .

Operazioni sui grafici

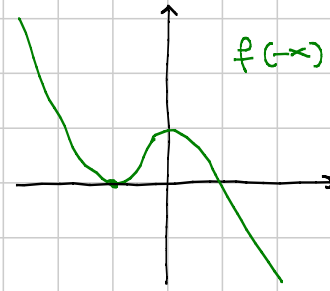
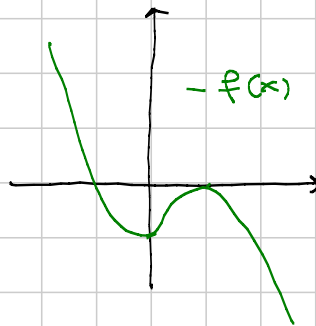
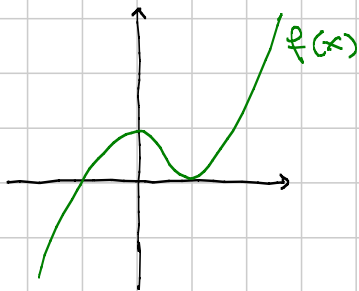
① $f(x) \rightsquigarrow f(x) + c$ traslare in alto o in basso di c

② $f(x) \rightsquigarrow f(x+c)$ traslare dx -sx di c



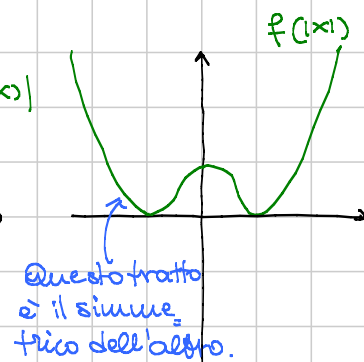
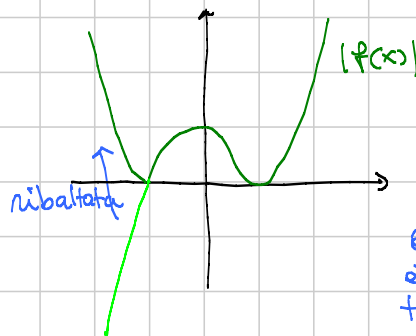
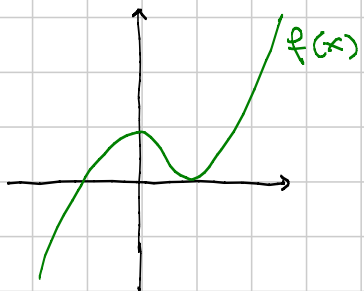
③ $f(x) \rightsquigarrow -f(x)$ simmetria rispetto all'asse x

④ $f(x) \rightsquigarrow f(-x)$ " " " y



⑤ $f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$ le parti sotto l'asse x si ribaltano sopra

⑥ $f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$

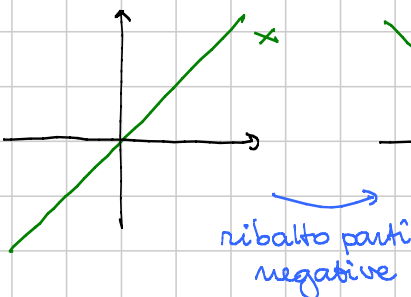


Consideriamo $f(|x|)$. Per $x \geq 0$ è come $f(x)$

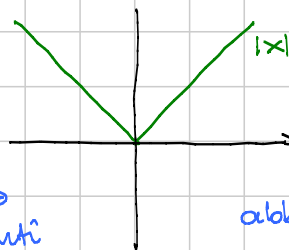
Per $x \leq 0$ è come $f(-x)$, quindi la
ribaltata da $x \rightarrow -x$ della precedente

— 0 — 0 —

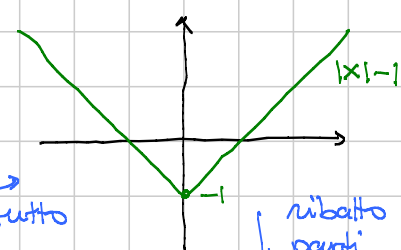
Esempio 1 Quante sono le soluzioni dell'equazione $||x|-1| = \frac{1}{2}$



ribalto parti negative

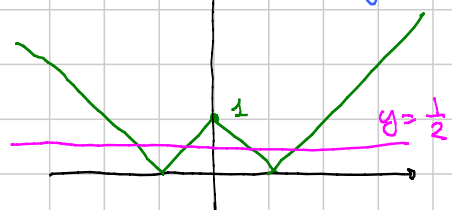


abbasso tutto di 1



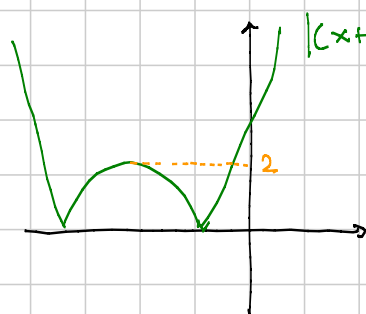
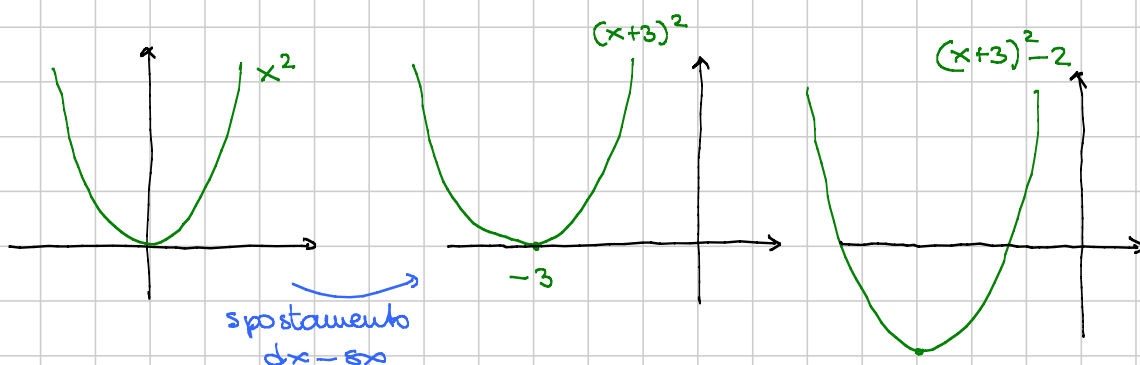
ribalto parti negative

Si vede quindi che l'equazione
ha 4 soluzioni: $x = \pm \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{3}{2}$



Esempio 2 Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni reali di

$$|(x+3)^2 - 2| = \lambda$$



Quindi $|(x+3)^2 - 2| = \lambda$ ha

- 0 soluzioni se $\lambda < 0$
- 2 soluzioni se $\lambda = 0$
- 4 soluzioni se $\lambda \in (0, 2)$
- 3 soluzioni se $\lambda = 2$
- 2 soluzioni se $\lambda > 2$

La funzione, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è surgettiva, ma non iniettiva.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 008

Titolo nota

01/10/2011

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ma vale anche se l'insieme di partenza è un opportuno $A \subseteq \mathbb{R}$). La funzione si dice

- **PARI** se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- **DISPARI** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- **PERIODICA** se esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

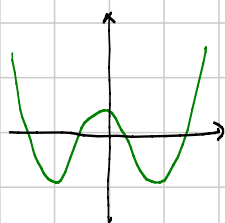
In questo caso ogni $T > 0$ che rende vera la definizione si dice periodo di $f(x)$. Se T è un periodo, allora anche $2T, 3T, 4T, \dots$

solo periodi ($f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x) \dots$).

Se c'è un periodo più piccolo di tutti, quello si dice periodo minimo.

In termini di grafico, f è

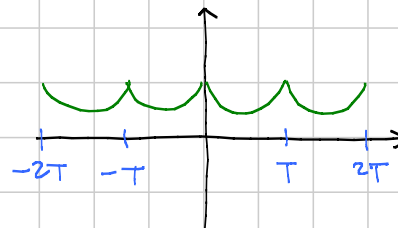
- **PARI** se il grafico è simmetrico rispetto all'asse y ;
- **DISPARI** " " " all'origine;
- **PERIODICA** se il tratto di grafico che corrisponde a $x \in [0, T]$ si ripete "periodicamente".



PARI



DISPARI



PERIODICA

Proprietà di MONOTONIA Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| • <u>debolmente crescente</u> se | $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ |
| • <u>strettamente crescente</u> se | $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$ |
| • <u>debolmente decrescente</u> se | $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$ |
| • <u>strettamente decrescente</u> se | $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$ |

Una funzione si dice MONOTONA se rientra in uno dei 4 casi precedenti.
Si dice strettamente monotona se...

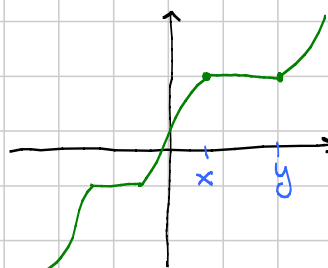
Oss. Meglio non usare mai crescente/decrescente senza l'avverbio strettamente/decrescente.

Achtung! Una funzione strettamente crescente è anche in particolare debolmente crescente. Idem per il decrescente.

Una funzione che è debolmente, ma non strettamente crescente, ha tratti piatti nel grafico



strettamente crescente, dunque anche debolm. cresc.



debolmente, ma non strettamente crescente (oss.: se $x < y$ e $f(x) = f(y)$, allora f è costante in tutto l'intervallo $[x, y]$)

Simmetrie, monotonia, iniettività.

① Una funzione pari NON può essere iniettiva. Infatti $f(-x) = f(x)$: se $x \neq 0$ ho 2 valori diversi in partenza a cui corrisponde lo stesso valore in arrivo.

② Le funzioni strettamente monotone sono sempre iniettive. Siano infatti a_1 e a_2 due valori diversi in partenza. Posso supporre $a_1 < a_2$. Se f è strett. cresc., allora $f(a_1) < f(a_2)$. Se f è strett. decr., allora $f(a_1) > f(a_2)$. In entrambi i casi $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Achtung! Strettamente monotona $\nRightarrow$ surgettiva
 Iniettiva $\nRightarrow$ monotona



strett. crescente, ma non
 surgettiva



bigettiva (ogni retta $y = \lambda$ incontra
 una e una sola volta il grafico),
 ma non monotona ($f(1) > f(0)$ e
 $f(2) < f(1)$)

— o — o —

Iniettività, monotonia, equazioni, disequazioni

Esempio

$$2^{3x+1} = 2^{x+3}$$

$$3x+1 = x+3 \quad 2x = 2 \quad x = 1$$

$$2^{2x+3} > 2^{3x+1}$$

$$2x+3 > 3x+1 \quad x < 2$$

Si possono fare questi passaggi? NO, o per lo meno NI.

- Nelle equazioni $\cancel{f}(A) = \cancel{f}(B) \Leftrightarrow A = B$
 è OK se f è iniettiva, ovviamente controllando che A e B appartengano all'insieme di definizione della funzione $f(x)$
- Nelle disequazioni $\cancel{f}(A) > \cancel{f}(B) \Leftrightarrow A > B$
 è OK se f è strettamente crescente (con A e B nell'insieme di definizione di $f(x)$)
Dim. Supponiamo che sia $f(A) > f(B)$. Ci sono 3 possibilità
 - $A = B$, allora sarebbe $f(A) = f(B)$, che è contro l'ipotesi
 - $A < B$, allora per la stretta crescenza sarebbe $f(A) < f(B)$, che è contro l'ipotesi.
 Dunque resta solo la possibilità $A > B$.

Guardando bene la dimostrazione si ha che

$$f(A) > f(B) \Leftrightarrow A > B$$

è OK anche se f è debolmente crescente.

Esercizio Quando è OK il passaggio $f(A) \geq f(B) \Leftrightarrow A \geq B$

- Nelle disequazioni il passaggio $f(A) > f(B) \Leftrightarrow A < B$ è OK se f è debolmente decrescente (esercizio: fare dim. come sopra).

Riassunto: $\rightarrow$ le funzioni iniettive si possono impunemente semplificare nelle equazioni

$\rightarrow$ le funzioni ... crescenti si possono impunemente semplificare nelle disequazioni

$\rightarrow$ le funzioni ... decrescenti si possono semplificare nelle disequazioni A PATTO DI INVERTIRE I VERSI.

Esempio $\log_7(2x+3) = \log_7(x+1)$

La funzione $\log_7 x$ è iniettiva, quindi semplifico e ottengo

$$2x+3 = x+1$$

$$x = -2.$$

NO! Bisogna controllare che i 2 argomenti stiano nella zona di definizione di $\log_7 x$, cioè imporre $2x+3 > 0$

$$x+1 > 0,$$

oppure fare la verifica alla fine.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 009

Titolo nota

01/10/2011

FUNZIONI ELEMENTARI: POTENZE E RADICI

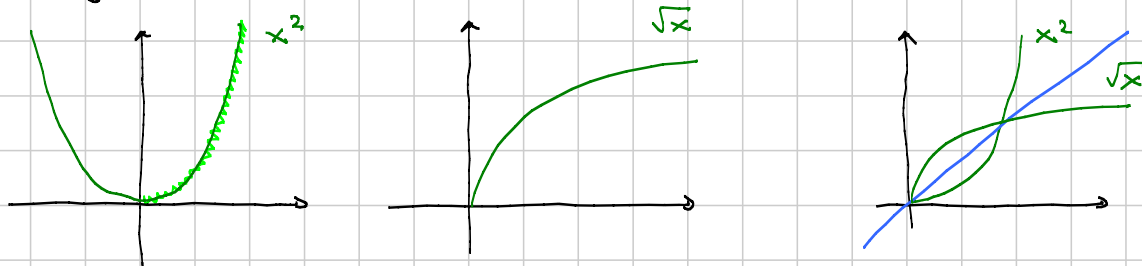
Potenze di esponente pari $f(x) = x^2$ (stesso discorso per $x^4, x^6, x^8, \dots$)

Funzioni PARI: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva, surgettiva, monotona.

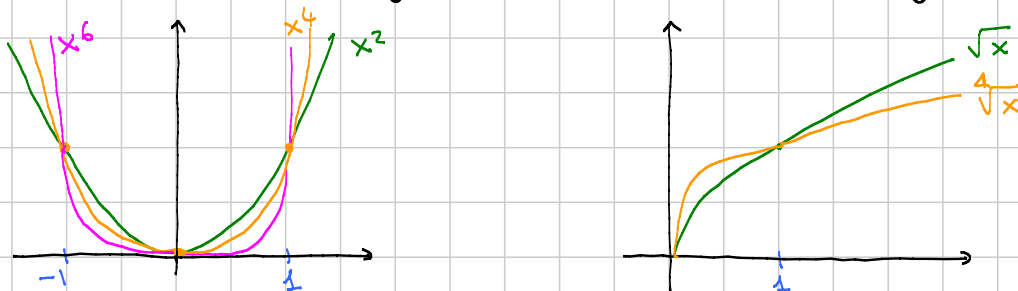
Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è iniettiva, surgettiva, strettamente crescente. Quindi ammette una funzione inversa $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ che è $g(x) = \sqrt{x}$.

Oss. $g(x) = \sqrt{x}$ prende in input valori ≥ 0 e restituisce valori ≥ 0 .



Fatto generale: il grafico di una funzione e della sua inversa sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Perché? Se $(x, y) \in \text{grafico di } f$, allora $(y, x) \in \text{grafico inversa}$.



Oss. $(3x+4)^2 = (5x-1)^2 \quad 3x+4 = 5x-1$

NO! perché la funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$.

Potrei se sapessi per qualche motivo che gli argomenti sono ≥ 0

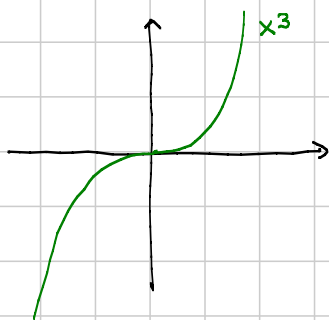
$(3x^4+2)^2 = (2^x+3)^2 \quad 3x^4+2 = 2^x+3 \quad \text{O.k.}$

Potenze con esponenti dispari $f(x) = x^3$ (stesso discorso per $x^5, x^7, \dots$)

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **DISPARI**:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Inoltre è strettamente crescente, iniettiva e surgettiva. Quindi esiste la funzione inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed è $g(x) = \sqrt[3]{x}$.



Oss. La funzione $\sqrt[3]{x}$ prende in INPUT valori reali qualunque e restituisce in OUTPUT valori con lo stesso segno dell'argomento.

Inoltre è strett. crescente e dispari.

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \sqrt[3]{1} = 1 \quad \sqrt[3]{0} = 0$$

Esempio

$$\begin{aligned} (2x+1)^{2011} &= (4x-3)^{2011} \\ 2x+1 &= 4x-3 \\ 2x &= 4 \quad x &= 2 \end{aligned}$$

conetto perché $f(x) = x^{2011}$
è iniettiva, quindi
semplicemente nelle equaz.

$$\begin{aligned} (2x+1)^{2011} &> (3x+5)^{2011} \\ 2x+1 &> 3x+5 \\ -x &> 4 \\ x &< -4 \end{aligned}$$

conetto perché $f(x) = x^{2011}$
è strett. cresc., quindi si
può semplificare
conservando i versi

$$\sqrt[7]{2x+3} = \sqrt[7]{x-1} \quad 2x+3 = x-1 \quad x = -4$$

Ok perché $\sqrt[7]{x}$ è iniettiva

$$\sqrt[70]{2x+3} = \sqrt[70]{x-1} \quad 2x+3 = x-1 \quad x = -4$$

N.B. Potrei semplificare, ma devo controllare (prima o dopo) l'insieme di definizione (facendo la verifica $x = -4$ non va bene).

Esponenziali e Logaritmi

("La x è all'esponente, mentre nelle potenze è alla base")

Consideriamo $f(x) = a^x$ con $a > 1$.

Non ha particolari simmetrie.

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva, ma non surgettiva. Vista come

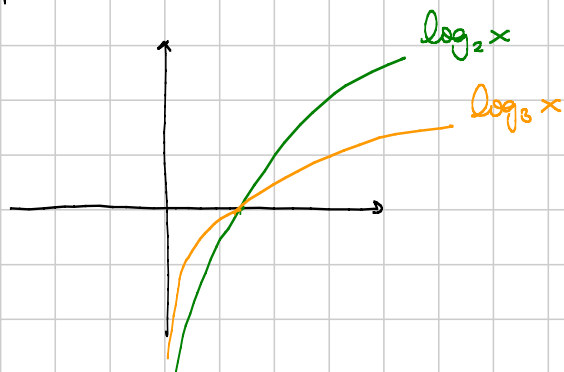
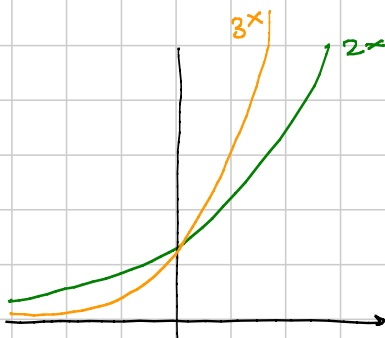
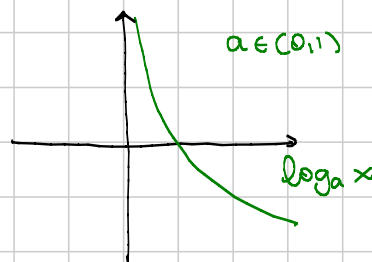
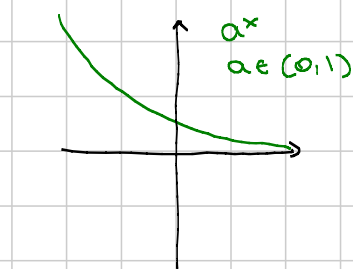
$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è iniettiva, surgettiva, strettamente crescente. Dunque ammette una funzione inversa $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ che è $g(x) = \log_a x$.

Oss.: $\log_a x$ prende in input valori $x > 0$.

È una funzione strettamente crescente.

— o — o —

Se la base è $a \in (0, 1)$ cambia la monotonia



Oss. Se $a = 1$, la funzione a^x è costante

Non si considerano funzioni esponenziali con basi $a < 0$.

Con basi $a < 0$ hanno senso "solo" esponenti interi, non esponenti reali qualunque ($(-3)^{\sqrt{2}}$ non ha senso).

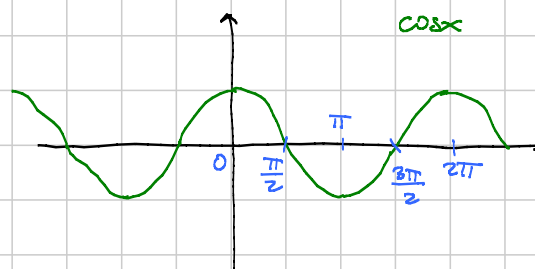
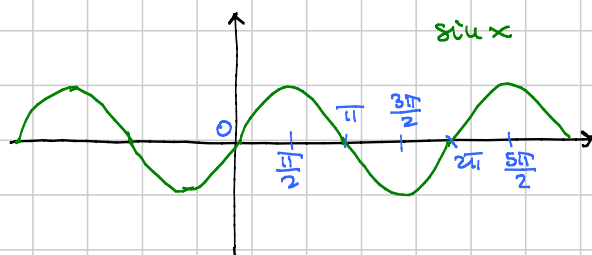
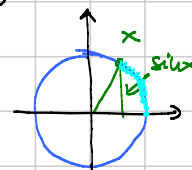
Funzione $\sin x$ $f(x) = \sin x$

Funzione DISPARI: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

Funzione PERIODICA di periodo minimo 2π

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né iniettiva, né surgettiva, né monotona

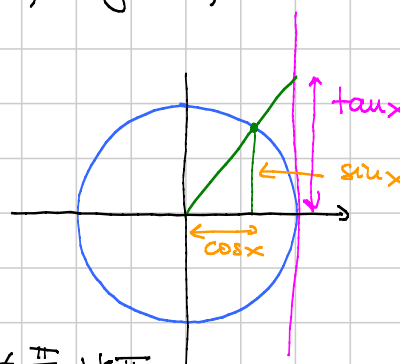


Funzione $\cos x$ Funzione PARI e periodica di periodo 2π .

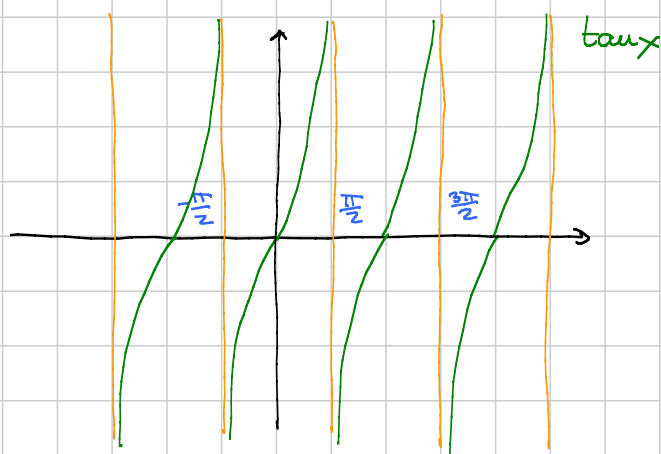
Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva, surgettiva, monotona

Funzione $\tan x$ Funzione DISPARI
e periodica di periodo minimo π .

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Definita per gli x t.c. $\cos x \neq 0$, cioè $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

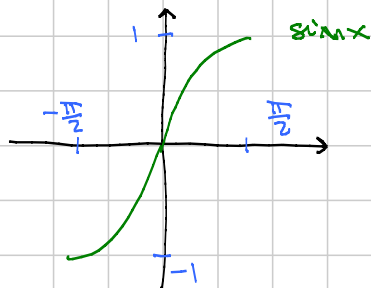


ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 010

Titolo nota

01/10/2011

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

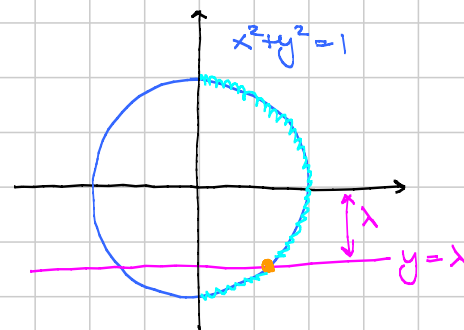
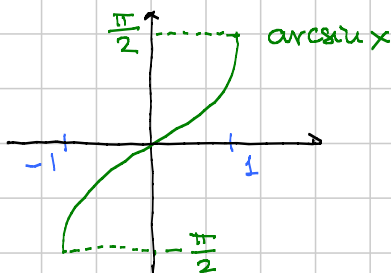
La funzione $\sin x$ vista come

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

è iniettiva, surgettiva, strettamente crescente. Ammette quindi una funzione inversa $g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ che è

$$g(x) = \arcsin x$$

Quindi $\arcsin x$ prende in INPUT valori $x \in [-1, 1]$ e fornisce in output valori in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. È una funzione strett. crescente.



Nella circonferenza trigonometrica: dato $\lambda \in [-1, 1]$ traccio la retta $y = \lambda$. In generale ho 2 intersezioni. L'intersezione corrispondente ad un angolo in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è proprio $\arcsin \lambda$.

La funzione $\cos x$, vista come $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è iniettiva, surgettiva, strettamente decrescente.

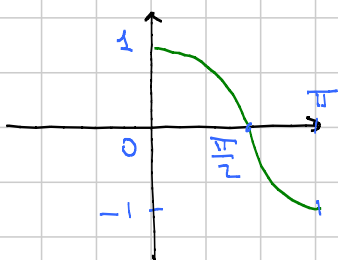
Quindi ha un' inversa

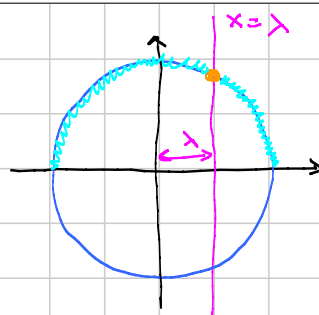
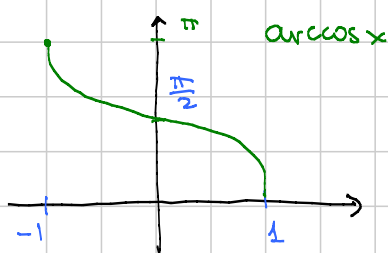
$$g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

che è

$$g(x) = \arccos x$$

Input: $[-1, 1]$ Output: $[0, \pi]$



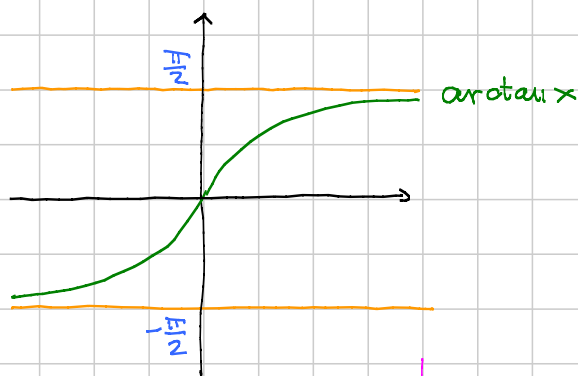
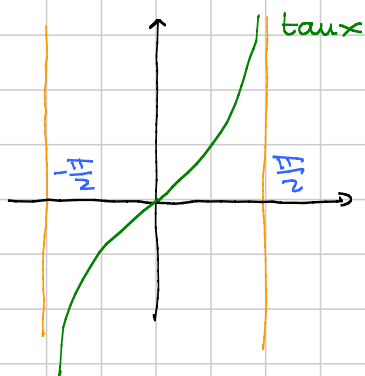


Nella circ. trigonometrica: dato $\lambda \in [-1, 1]$ traccio la retta $x = \lambda$ e prendo l'intersezione nella parte alta, cioè quella in $[0, \pi]$.
L'angolo (o meglio arco) corrispondente è proprio $\arccos \lambda$.
— o — o —

$f(x) = \tan x$ Range $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
l'insieme di definizione in cui $\cos \neq 0$.

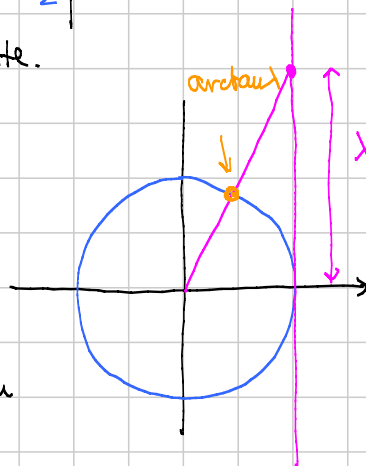
Allora, vista come $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva ma è sur.
Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva, surgettiva, e
strettamente crescente. Quindi ammette un' inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
che si indica con $g(x) = \arctan x$

Input: valori reali qualunque Output: valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



$\arctan x$ è DISPARI e strett. crescente.

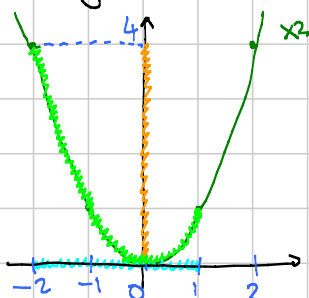
Nella circonferenza trigonometrica:
fisso $\lambda \in \mathbb{R}$ (qualunque), prendo
sulla tangente il p.to ad altezza λ .
Unisco con l'origine e individuo
un unico p.to in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la cui tan
è proprio λ . Questo è $\arctan \lambda$.
— o — o —



Esercizi su immagine e controimmagine.

$$f(x) = x^2. \text{ Calcolare } f([-2, 1]) = \{f(x) : x \in [-2, 1]\}$$

È uguale a $[0, 4]$. Come si vede graficamente?

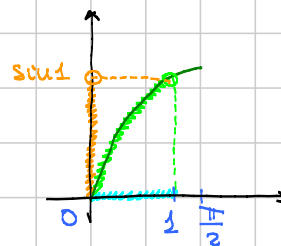


- Individuo $[-2, 1]$ in partenza
- Trovo il corrispondente tratto di grafico
- Riporto il tratto di grafico sull'asse y , cioè nell'insieme di arrivo, e quello che ottengo è l'immagine

$$f(x) = \sin x \quad \text{Calcolare } f([0, 2]) = \{f(x) : x \in [0, 2]\} = [0, 1]$$

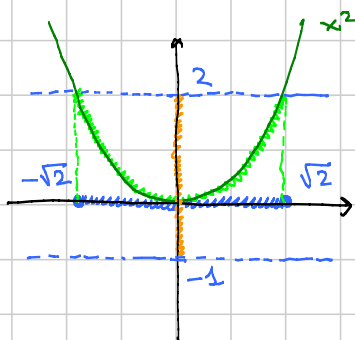


$$f([0, 1]) = [0, \sin 1]$$



Controimmagine $f(x) = x^2$ Calcolare

$$f^{-1}((-1, 2)) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (-1, 2)\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$



- individuare $(-1, 2)$ nell'insieme di arrivo, cioè sull'asse y
- individuare il corrispondente tratto di grafico
- riportare il tratto sull'insieme di partenza. Così ottengo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Riassumendo: IMMAGINE: asse $x \rightarrow$ grafico $\rightarrow$ asse y
 CONTROIMMAGINE: asse $y \rightarrow$ grafico $\rightarrow$ asse x
 — o — o —

<u>Esercizio</u>	$\arccos(\cos 3) = 3$	V	
	$\arccos(\cos 2) = 2$	V	
	$\arccos(\cos 1) = 1$	V	
	$\arcsin(\sin 3) = 3$	F	} $\arcsin$ non può fornire valori fuori di $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
	$\arcsin(\sin 2) = 2$	F	
	$\arcsin(\sin 1) = 1$	V	
	$\cos(\arccos \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$	V	
	$\cos(\arccos 2) = 2$	F	↖ in INPUT di $\arcsin$ e ↙ $\arccos$ solo valori in $[-1, 1]$!!!
	$\sin(\arcsin \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$	V	
	$\sin(\arcsin 3) = 3$	F	

Si può cancellare una funzione con la sua inversa?

Sì, ma solo se l'argomento sta nell'insieme di definizione della funzione più interna.

Esercizio (Hard) Calcolare $\arccos(\cos 4)$.
 $\arcsin(\sin 2)$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 011

Titolo nota

05/10/2011

LIMITI DI SUCCESSIONI

Def. Sia P_n una proprietà con un parametro $n \in \mathbb{N}$. Si dice che P_n è vera

- DEFINITIVAMENTE se P_n è vera da un certo p.to in poi, cioè se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ b.c. P_n è vera $\forall n \geq n_0$;
- FREQUENTEMENTE se P_n è vera per infiniti valori di n .

Esempi $n^2 \geq 70$ vera definitivamente perché vera per ogni $n \geq 9 = n_0$
è anche vera frequentemente

(in generale: vera definitivamente $\Rightarrow$ vera frequentemente, ma non viceversa)

$(-2)^n \geq 70$ vera frequentemente (per tutti gli n pari ≥ 8)
ma non definitivamente

$(-2)^n \geq 70$ è falsa frequentemente (per tutti gli n dispari)
— 0 — 0 —

Definizione di successione. Buolaticamente una successione è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (in partenza c'è $\mathbb{N}$). Questo vorrebbe dire che $f(n)$ è definito per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo modo $f(n) = \frac{1}{n}$ non sarebbe una succ., perché non è definita per $n=0$.

Più elasticamente, si accettano come successioni tutte le funzioni definite anche non per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma almeno definitivamente. Di conseguenza l'espressione può non essere definita per un numero finito di valori.

Notazione: sempre si abbrevia $f(n)$ con f_n .

Esempi $a_n = \frac{1}{n-70}$

↓
sempre ok $\forall n \geq 71$,
quindi è una succ.

$b_n = \sqrt{n-70}$

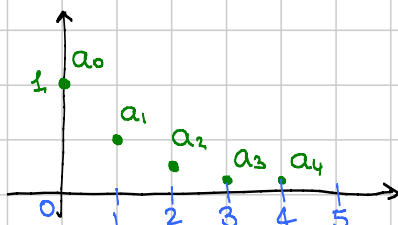
↓
sempre ok $\forall n \geq 70$
quindi è una succ.

$c_n = \sqrt{3000-n}$

↓
ok fino a 3000, poi
NO, quindi non è
una successione

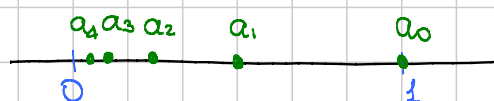
Come rappresentare una successione? Voglio visualizzare $a_n = \frac{1}{2^n}$

1° modo Punti nel piano cartesiano: disegno i p.ti $(n, \frac{1}{2^n})$



$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$$

2° modo Punti su una retta



3° modo "Lampadine". Pensiamo alla retta (come nel secondo modo)

Ogni secondo si accende una lampadina che resta accesa 1 sec.
La lampadina si accende prima in a_0 , poi in a_1 , poi in a_2 , ...
— o — o —

Definizione di limite Una successione ha 4 possibilità

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$
"limite per n che tende a
 $+\infty$ di a_n uguale ad l "

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
"a_n tende ad l "

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

$a_n \rightarrow +\infty$

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

$a_n \rightarrow -\infty$

④ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ non esiste

a_n è indeterminata oppure
 a_n non ha limite

Il caso ④ presenta tre sottocasi:

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+$

$a_n \rightarrow l^+$ (a_n tende ad l da destra)

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^-$

$a_n \rightarrow l^-$ " " " " " sinistra

• nessuno dei precedenti

Esempi $a_n = \frac{1}{2^n}$ $a_n \rightarrow 0$, anzi $a_n \rightarrow 0^+$
 $b_n = n^2$ $b_n \rightarrow +\infty$
 $c_n = -n^3$ $c_n \rightarrow -\infty$
 $d_n = (-1)^n : 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ d_n non ha limite.
 — 0 — 0 —

Definizioni di limite

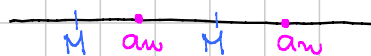
Def. di ④ Nessuno dei precedenti

Def. di ② Si dice che $a_n \rightarrow +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

si ha che $a_n \geq M$ definitivamente

(cioè $a_n \geq M$ da un certo n_0 in poi. Ovviamente
 non dipende da M)



Def. di ③ Si dice che $a_n \rightarrow -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)

si ha che $a_n \leq M$ definitivamente

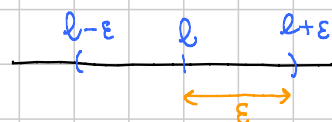
(cioè $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ b.c. $a_n \leq M \quad \forall n \geq n_0$)

↓ dipende da M .

Def. di ① Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

si ha che $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente



In particolare, si ha che $a_n \rightarrow l^+$ se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $l < a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente

mentre si ha che $a_n \rightarrow l^-$ se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $l - \varepsilon \leq a_n < l$ definitivamente.

— 0 — 0 —

Luoghi comuni da sfatare

① Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora a_n è definitivamente crescente.

Esempio: $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, \dots$

② Se $a_n \rightarrow 0$, allora o $a_n \rightarrow 0^+$, o $a_n \rightarrow 0^-$

(stessa cosa sostituendo 0 con qualunque altro numero)

Esempio: $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

③ Se a_n non è limitata superiormente, allora $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio: $a_n = (-2)^n$ $1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

oppure $b_n = 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \dots$

Oss. Nella definizione di ① posso scrivere equivalentemente

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $|a_n - l| \leq \varepsilon$ definitivamente

distanza tra a_n ed l .

Esercizio Se $a_n \rightarrow 0^+$, è vero che a_n è definitivamente decrescente?

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 012

Titolo nota

05/10/2011

Esempio 1 $a_n = n^2$ Dimostriamo che $a_n \rightarrow +\infty$.Devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ ho che $n^2 \geq M$ definitivamente.

Ci sono 2 casi:

- se $M < 0$, allora $n^2 \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora $n^2 \geq M$ se e solo se $n \geq \sqrt{M}$ (perché $n \geq 0$), il che è vero definitivamente.

Esempio 2 $a_n = \sqrt{n}$ Dimostriamo che $a_n \rightarrow +\infty$.Devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ ho che $\sqrt{n} \geq M$ definitivamente.

Ci sono 2 casi:

- se $M < 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ sempre, quindi definitivamente
- se $M \geq 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ se e solo se $n \geq M^2$, il che è vero definitivamente (più M è grande, e più il definitivamente inizia dopo)

Fatto generale Se $a_n = n^\alpha$, con $\alpha > 0$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ (stessa dim.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty \quad \forall \alpha > 0$$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$. Lo dimostriamo usando la definizione.Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitivamente
 $l < a_n \leq l + \varepsilon$ con $l = 0$

Considero le 2 disuguaglianze:

- $0 < \frac{1}{n}$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente
- $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ è vera se e solo se $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, il che è vero definitivamente.

Oss. $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 \leq n\varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$\uparrow$
 moltiplico per n
 che definitivamente è > 0

$\uparrow$
 divido per ε che so
 essere > 0 .

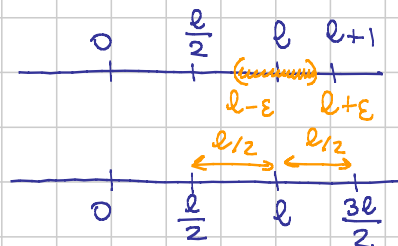
Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0 \quad \forall a < 0$$

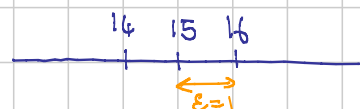
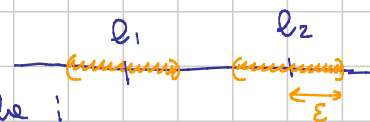
Permanenza del segno e discorsi affiniSupponiamo che $a_n \rightarrow l > 0$. Allora $a_n > 0$ definitivamenteDim.: Uso la definizione di limite con un valore $\varepsilon = \frac{l}{2}$.

Allora ho che

$$0 < \frac{l}{2} \leq a_n \leq \frac{3l}{2} \quad \text{definitiv.}$$

In particolare $a_n > 0$ definitivamente.Supponiamo che $a_n \rightarrow 15$. Allora $a_n \geq 14$ definitivamente.Dim. Uso la definizione di limite con $\varepsilon = 1$ e ho che

$$14 \leq a_n \leq 16 \quad \text{definitivamente}$$

Supponiamo che $a_n \rightarrow -\infty$. Allora $a_n \leq -2011$ definitivamente.Dim. Basta prendere $M = -2011$ nella definizione di limite.Unicità del limite Una successione ha sempre uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④.Inoltre, se a_n è di tipo ①, esiste un unico $l \in \mathbb{R}$ per cui $a_n \rightarrow l$."Dim.": se $a_n \rightarrow l_1$ e $a_n \rightarrow l_2$,Basta prendere ε abbastanza piccolo in modo che i2 intervallini in cui a_n deve stare definitivamente siano disgiunti.

STRUMENTI PER IL CALCOLO DI LIMITI: permettono di calcolare i limiti senza dovere usare la definizione.

→ Teoremi di confronto

→ teoremi algebrici

Teorema di confronto (confronto a 2)

Siano a_n e b_n 2 successioni. Supponiamo che

$$a_n \geq b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora

- se $b_n \rightarrow +\infty$, allora anche $a_n \rightarrow +\infty$
- se $a_n \rightarrow -\infty$, allora anche $b_n \rightarrow -\infty$

Teorema dei carabinieri (confronto a 3)

Siano a_n, b_n, c_n 3 successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente.

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ e $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (stesso l).

Allora anche $b_n \rightarrow l$ (stesso l).

Oss. Il teorema dei carabinieri dice in particolare che b_n è di tipo ①.

Achtung! Nel teorema di confronto a 2 le tesi non scritte sono in genere false. Supponiamo per esempio che

$$a_n \geq b_n \quad \text{definitivamente,}$$

Supponiamo che $a_n \rightarrow 12$.

Cosa posso dire di b_n ?

- Non può andare a $+\infty$ $b_n \overset{\text{NO}}{\neq} +\infty$
- Non può andare ad un limite > 12
- Può tendere a $-\infty$, tendere ad un numero reale $l \leq 12$, oppure può non avere limite.

Achtung! Supponiamo che $a_n \geq b_n$ definitivamente.
 Supponiamo che $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$.
 Allora $l_1 \geq l_2$.
 Supponiamo invece che $a_n > b_n$ definitivamente.
 Posso concludere che $l_1 > l_2$?

ASSOLUTAMENTE NO !!!

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

Esempio Sia $a_n = \frac{2}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Allora per ogni $n \geq 1$ si ha che $a_n > b_n$. Tuttavia $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$.

Quindi sapendo che $a_n > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$, $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$ posso solo dire che $l_1 \geq l_2$.
 — 0 — 0 —

Retta reale estesa $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Se scrivo $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, riunifico i casi ①, ②, ③ nella stessa scrittura,

Le operazioni di somma e prodotto si estendono parzialmente a $\bar{\mathbb{R}}$

Esempi

$$12 + (+\infty) = +\infty$$

$$12 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$12 + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\frac{-\infty}{+\infty} = 0$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$+\infty + (-\infty) = \text{BOH}$$

$$0 \cdot (-\infty) = \text{BOH}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 013

Titolo nota

06/10/2011

Fattoriali e coefficienti binomialiDefinizione ricorsiva di fattoriale

$$\bullet 0! = 1$$

$$\bullet (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Detto con i puntini $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ se $n \geq 1$

Significato combinatorio. Dati n oggetti diversi, $n!$ rappresenta il numero di modi di ordinarli.

Esempio: date n persone, in quanti modi possiamo formare una fila?

Risposta: $n!$. Perché?

Il primo possiamo sceglierlo in n modi

il 2° " " " $n-1$ modi (uno qualunque dei rest.)

il 3° " " " $n-2$ " "

e così via.

Le possibilità si moltiplicano perché sono scelte indipendenti.

Esempio Con $n=3$ e 3 persone A, B, C

A ↗ AB → ABC

A ↘ AC → ACB

B ↗ BA → BAC

B ↘ BC → BCA

C ↗ CA → CAB

C ↘ CB → CBA

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Definizione di Coefficiente binomiale. Dati 2 interi $0 \leq k \leq n$, si pone

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

si legge "n su k"

k fattori al num.

Esempio $k=2$ $n=5$ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{(2 \cdot 1) (\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1})} = \frac{5 \cdot 4}{2!}$

$k=4$ $n=81$ $\binom{81}{4} = \frac{81!}{4! \cdot 77!} = \frac{81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78}{4!}$

Significato combinatorio. Dato un gruppo di n persone, vogliamo scegliere un commando di k persone. In quanti modi possiamo farlo?

Risposta: in $\binom{n}{k}$ modi. Perché?

Il 1° posso sceglierlo in n modi
 il 2° " " " $(n-1)$ modi
 il 3° " " " $(n-2)$ modi
 ⋮
 il k -esimo " " " $(n-k+1)$ modi

Ora devo tenere conto che lo stesso commando di k persone può essere stato scelto in tanti modi diversi, a seconda dell'ordine in cui ho scelto le k persone. Quindi ogni commando può essere scelto in $k!$ modi diversi, dunque devo dividere per $k!$. Ottengo così

$$\text{numero modi} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Anagrammi Quanti sono gli anagrammi di una data parola?

PARCO : si tratta di riordinare ("mettere in fila") 5 lettere, quindi ho 5! possibilità $5! = 120$

PORCO : il problema è che c'è una lettera ripetuta

PORCO, PORCO sono distinti nel conto dei 5!, ma sono lo stesso anagramma. Ogni anagramma è contato 2 volte nei 120, quindi devo dividere per 2 : $\frac{120}{2} = 60$.

MATEMATICA : 10 lettere, con 2 M, 2 T, 3 A. Ora devo

- dividere per 2 per colpa delle 2M,
- dividere di nuovo per 2 per colpa delle 2T,

- dividere per $3! = 6$ per colpa delle 3A perché 3A colorate diversamente possono comparire in 6 modi diversi.

Risposta : $\frac{10!}{2! 2! 3!}$

In generale si divide per i fattoriali di tutte le lettere ripetute.

BIO MEDICA $\frac{9!}{2!}$ — o — o —

Proprietà dei binomiali

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$

C'è un solo modo di scegliere tutti o nessuno in un gruppo di n .

- $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$ ci sono n modi di scegliere una persona in un gruppo di n

- $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n$ Invece di scegliere le $n-1$ persone da prendere, faccio prima a scegliere la persona da escludere.

- Simmetria dei binomiali : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Algebricamente : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$ $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$

Dal p.to di vista combinatorio : scegliere le k persone da prendere è equivalente a scegliere le $n-k$ persone da escludere.

- Generazione ricorsiva : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Dim. algebrica : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} =$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) k! (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \left\{ \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right\} = \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{\cancel{k+1} + n - \cancel{k}}{(n-k)(k+1)}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 014

Titolo nota

06/10/2011

Teoremi algebrici per limiti di successioni Siano a_n e b_n 2 successioni.
Supponiamo che

$$a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

(Questo vuol dire che a_n e b_n sono di tipo ①, ② o ③).

Allora

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2} \quad (\text{si intende che le operazioni sono estese a } \bar{\mathbb{R}})$$

TRANNE in alcuni casi speciali cioè

- nelle 7 forme indeterminate

$$\underbrace{+\infty - \infty}_{\text{somma e diff.}}, \underbrace{0 \cdot (\pm\infty)}_{\text{prodotto}}, \underbrace{\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}}_{\text{quoziente}}, \underbrace{0^0, (\pm\infty)^0, 1^{(\pm\infty)}}_{\text{esponenziali}}$$

- quando nel quoziente il denominatore tende a 0 (e qui dipende se è 0^+ , 0^- , o nessuno dei due).

Achtung! I teoremi algebrici non dicono nulla nel caso in cui uno dei 2 limiti (di a_n o b_n) non esista.

Talvolta servono ipotesi per dare senso ai quozienti

($b_n \neq 0$ definitivamente) o agli esponenziali ($a_n > 0$ definit.).

Achtung! Achtung! Forma indeterminata vuol dire che non posso prevedere il limite di quella operazione (somma, prodotto, ...) sulla base solo dei limiti delle 2 componenti.

NON vuol dire che la successione risultante sia indeterminata, Vuol dire solo che va esaminata caso per caso.

Esempio 1 $a_n = \underbrace{n^3}_{\downarrow +\infty} + \underbrace{n^2}_{\downarrow +\infty} \rightarrow +\infty$ per il teo. algebrico

Esempio 2 $a_n = \underbrace{n^3}_{+\infty} - \underbrace{n^2}_{-\infty}$: forma indeterminata
 $= \underbrace{n^2}_{\downarrow +\infty} (\underbrace{n-1}_{+\infty}) \rightarrow +\infty$
 $= +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

Esempio 3 $a_n = \underbrace{\sqrt{n}}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\downarrow 0} \rightarrow +\infty$
 $+ \infty - 0 = +\infty$

Esempio 4 $a_n = 2^n$ Perché $a_n \rightarrow +\infty$? Volendo per teo. alg. con l'esponenziale

Si può usare che $\underbrace{2^n}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{n+1}_{\downarrow +\infty}$ (dimostrato per induzione)

Poiché $n+1 \rightarrow +\infty$, si ha che $2^n \rightarrow +\infty$ per confronto

Fatto generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \quad \forall a > 1$ → Tabellina

Dim.: $a^n = [1 + (a-1)]^n \geq 1 + (a-1)n$
 $\downarrow$
 uso che $(1+x)^n \geq 1 + nx$
 con $x = a-1$ (Bernoulli)

Se $a > 1$ ho che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a-1) \cdot n = \text{numero pos.} \cdot +\infty = +\infty$.
 Ma allora per confronto a 2 anche $a^n \rightarrow +\infty$.

Altro fatto generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad \forall a \in (0, 1)$
 e anche $\forall a \in (-1, 1)$

Dim.: se $a \in (0, 1)$ posso scriverlo nella forma $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$, quindi

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \left[= \frac{1}{+\infty} \right] \rightarrow 0,$$

Achtung! $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$ Occhio: la successione 1^n è la succ. costante $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ Perché?

Intanto $-1 \leq \sin n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Divido per n . Essendo $n > 0$ (definitivamente) conservo i versi

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

I due laterali tendono a 0 perché sono in tabellina (potenze di n con esponente negativo), quindi per i carabinieri anche il centrale tende a 0.

Esempio 6 $a_n = \boxed{n} - \boxed{\sin n}$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ 0

Due modi per uscire:

$$\boxed{n - \sin n} \geq \boxed{n - 1}$$

$\downarrow$
 $+\infty$
 per confronto a 2

tolgo di più

$$\boxed{n - 1}$$

$\downarrow$
 $+\infty$ per teo. algebrici

2° modo: raccolgo n :

$$a_n = \boxed{n} \left(1 - \frac{\sin n}{n} \right) = [+ \infty (1 - 0) = + \infty]$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ 0 : fatto prima

Esempio 7 $a_n = \frac{n^3 - 3n^2}{n - 6n^3 + 2} \rightarrow -\frac{1}{6}$

Le potenze + grandi comandano, chi comanda si raccoglie, il resto sono teoremi algebrici

$$a_n = \frac{n^3 \left(1 - \frac{3}{n} \right)}{n^3 \left(\frac{1}{n^2} - 6 + \frac{2}{n^3} \right)} \rightarrow \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(2^n + n!)}{n^2 + 3} = 0$

Infatti $0 \leq \arctan(2^n + n!) \leq 123$ (in realtà anche di $\frac{\pi}{2}$)

Divido per $n^2 + 3$, che è > 0 quindi non cambia i versi

$$\boxed{0} \leq \frac{\arctan(2^n + n!)}{n^2 + 3} \leq \boxed{\frac{123}{n^2 + 3}}$$

↓ ↓
0 0
per i carabinieri

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{n + 4} = \left[\frac{+\infty - \infty}{+\infty} \right]$

Sopra comanda $\sqrt{n}$, sotto comanda n . Raccolgo:

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{n + 4} = \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{n \left(1 + \frac{4}{n}\right)}$$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

$$= \frac{\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}{\boxed{1 + \frac{4}{n}}} \xrightarrow{\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{matrix}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$$

Esempio 10 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-|3n - n^2| + n^2}{5n + 2}$

L'argomento del valore assoluto è $3n - n^2$, che tende a $-\infty$, quindi definitivamente è < 0 per permanenza del segno.

Quindi definitivamente $|3n - n^2| = n^2 - 3n$ (val. assd. di cosa < 0).

Quindi definitivamente

$$\frac{-|3n - n^2| + n^2}{5n + 2} = \frac{-\cancel{n^2} + 3n + \cancel{n^2}}{5n + 2} \rightarrow \frac{3}{5} \quad (\text{solito raccoglimento}).$$

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 015

Titolo nota

07/10/2011

3 criteri : $\rightarrow$ criterio della RADICE
 $\rightarrow$ criterio del RAPPORTO
 $\rightarrow$ criterio RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE

} Confronti tra ordini di infinito

CRITERIO DELLA RADICE Sia a_n una succ. tale che $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora

- se $l > 1$ (compreso il caso $l = +\infty$), allora $a_n \rightarrow +\infty$
- se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$
- se $l = 1$, allora BOM, cioè non posso dire nulla di a_n .

Operativamente : $\rightarrow$ devo fare il limite di una succ. a_n e non lo so fare
 $\rightarrow$ provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ (dopo aver controllato che sia $a_n \geq 0$)
 $\rightarrow$ se questo limite esiste ed è $\neq 1$, allora conosco il limite di a_n ,
 $\rightarrow$ se questo limite è $= 1$ oppure non esiste, allora devo cercare un altro strumento.

CRITERIO DEL RAPPORTO Sia a_n una succ. tale che $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

rapporto tra 2 termini consecutivi della succ.

Allora ho le stesse conclusioni del criterio della radice.

Oss. Gli l del criterio del rapporto e della radice sono per forza ≥ 0 .

CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE

Sia a_n una succ. tale che $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ (stesso limite).

Oss. Se va male il criterio del rapporto perché il limite tende ad $\pm$, allora va male anche il criterio della radice (tende a $\pm$ pure lei).
Se va male il criterio della radice, allora va male anche il rapporto. Infatti, se il rapporto avesse un limite $\neq \pm$, anche la radice dovrebbe avere lo stesso limite $\neq \pm$.

Oss. Ci sono esempi in cui il rapporto non ha limite, ma la radice sì.
Ovviamente non ci sono esempi in cui entrambi hanno limite e questi limiti sono diversi.

Dim. criterio radice Ci sono due casi

Caso 1. Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$ Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

Facciamo il caso in cui l è reale (il caso in cui $l = +\infty$ è più semplice).

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora sicuramente

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2} \text{ definitivamente}$$

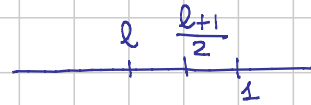
Ora elevo tutto alla n (conservando i versi perché ...). Otengo

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{a_n} & \geq & \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{per confronto a 2} & & +\infty \text{ perché esponenziale con base } > 1 \end{array}$$

Nel caso $l = +\infty$ basta dire che $\sqrt[n]{a_n} \geq 1.5$ definitivamente e procedere come sopra.

Caso 2 Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$ Tesi: $a_n \rightarrow 0$

Perché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora



$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitivamente. Elevando alla n ottengo

$$\boxed{0} \leq \underbrace{a_n}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{per i carabini}}} \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{esponenziale con base in } [0,1]}}$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2}$

Con i teoremi algebrici $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2^0 = 1$

Disuguaglianza di Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Pongo $x = \frac{1}{n}$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

Estraggo la radice n -esima a dx e sx (e conservo i vers. perché...)

$$\boxed{1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \leq \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \quad (\sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{1} = 1)$$

Fatto generale: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$ → Tabellina

Dim. Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$ e ottengo $\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{a-1}{n} = a$

quindi facendo la radice n -esima: $\sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$

Ora se $a \geq 1$ ho che

$$\boxed{1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \leq \underbrace{1+\frac{a-1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

Se invece $a < 1$, lo scrivo come $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ e

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

Esempio 1 Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ (ossia: non rientra nel caso precedente, in cui l'argomento della radice era FISSO)

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow (+\infty)^0$ che è indeterminata, quindi NON segue dai teoremi algebrici.

Applico il criterio rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n$
(se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$, allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}} \rightarrow 1. \quad \text{Ma allora } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2 + 7}$ $[(n^2 + 7)^{\frac{1}{n}} \rightarrow (+\infty)^0]$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n^2 + 7$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + 7}{n^2 + 7} = \frac{n^2 + 2n + 1 + 7}{n^2 + 7} = \dots \rightarrow 1$$

Ma allora anche $\sqrt[n]{n^2 + 7} \rightarrow 1$

Metodo alternativo: raccolgo n^2 subito e mi riconduco all'esempio 1

$$\sqrt[n]{n^2 + 7} = \sqrt[n]{n^2 \left(1 + \frac{7}{n^2}\right)} = \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{7}{n^2}} = \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\substack{\downarrow \\ 1^2}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\substack{\downarrow \\ 1^0}} \rightarrow 1$$

Fatto generale: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1$ per ogni polinomio che sia ≥ 0 definitivamente.

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Applico rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \rightarrow +\infty. \quad \text{Allora anche } \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty \text{ per lo stesso limite.}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 016

Titolo nota

07/10/2011

Confronti tra ordini di infinitoNumero e (numero di NEPERO) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7\dots$

Lezione successiva: dimostrazione che il limite esiste ed è compreso tra 2 e 3.

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^3} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$ 1° modo: criterio del rapporto con $a_n = \frac{2^n}{n^3}$. Provo a fare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \rightarrow 2$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l = 2 > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$ 2° modo: criterio della radice con $a_n = \frac{2^n}{n^3}$. Provo a fare

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} \rightarrow 2 \quad (\text{come era ampiamente prevedibile dal rapporto} \rightarrow \text{radice})$$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l = 2 > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$.Fatto generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \forall a > 1, \forall b \in \mathbb{R}$$

Esponenziale batte potenze

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{300^n}{n!} \quad a_n$

$$1^\circ \text{ modo: criterio della radice: } \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{300^n}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{300}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0 < 1$, anche $a_n \rightarrow 0$.

2° modo: criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{300^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{300^n}{n!}} = \frac{300^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{300^n} = 300 \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{300}{n+1} \rightarrow 0$$

Perché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l = 0 < 1$, anche $a_n \rightarrow 0$.

Fatto generale: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \geq 1$ Fattoriale batte esponenziale (e anche le potenze)

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n + n^4 + 8}$

Alla domanda si raccoglie, e domanda 7^n :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{3^n + 7^n + n^4 + 8} &= \sqrt[n]{7^n \left(\frac{3^n}{7^n} + 1 + \frac{n^4}{7^n} + \frac{8}{7^n} \right)} \\ &= 7 \cdot \left\{ \left(\frac{3}{7} \right)^n + 1 + \frac{n^4}{7^n} + \frac{8}{7^n} \right\}^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

(espon. con base < 1)
(espon. batte potenza)
(perché $\frac{8}{+\infty}$)

$1^0 = 1 \rightarrow 7$

Esempio 4 $\sqrt[n]{3n! + 3^n + \cos(n!)} \rightarrow +\infty$

Domanda $n!$ dentro la radice: basta raccogliere $n!$

$$\sqrt[n]{n!} \left\{ 3 + \frac{3^n}{n!} + \frac{\cos(n!)}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} \rightarrow +\infty$$

$+\infty$
 $3^0 = 1$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^n - 8^n + n^8 - n^{20} = +\infty$

Raccolgo 10^n : $10^n \left\{ 1 - \left(\frac{8}{10} \right)^n + \frac{n^8}{10^n} - \frac{n^{20}}{10^n} \right\} \rightarrow +\infty$

$\downarrow$
 $\downarrow$
 $\downarrow$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Applico criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l = e = 2,718... > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 7 (Achtung!) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} = +\infty$

Applico criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{n^2}} = \frac{3^{n^2+2n+1}}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{3^{n^2}} = \frac{3^{2n+1}}{n+1} = \frac{3 \cdot 9^n}{n+1} \rightarrow +\infty$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty > 1$, per il criterio del rapporto abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$

Achtung! L'esponenziale con esponente n perde dal fattoriale, l'esponenziale con esponente n^2 batte il fattoriale.

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ [$\frac{+\infty}{+\infty}$: forma indeterminata]

Idea: $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ Ora applichiamo il rapporto $\rightarrow$ radice

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1) \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$, abbiamo che $a_n \rightarrow 0$ (che già sapevamo), ma anche $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 017

Titolo nota

07/10/2011

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^{100}} = +\infty$

Applico criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{(n+1)^2}}{[(n+1)!]^{100}} \cdot \frac{[n!]^{100}}{3^{n^2}} = \frac{3^{n^2+2n+1}}{(n+1)^{100} \cdot [n!]^{100}} \cdot \frac{[n!]^{100}}{3^{n^2}} = \\ &= \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^{100}} = \frac{3 \cdot 3^{2n}}{[n(1+\frac{1}{n})]^{100}} = \frac{3 \cdot 9^n}{n^{100} \cdot (1+\frac{1}{n})^{100}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty > 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow +\infty$.

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$

Criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(2n+2)(2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0 < 1$, abbiamo che $a_n \rightarrow 0$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}$

lo scrivo come $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$. Ora applico il criterio rapporto $\rightarrow$ radice

con $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 (n+1)^{2n}} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}} \\
 &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} \\
 &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^2} \rightarrow \frac{4}{e^2}
 \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 4 $\frac{1}{e^2}$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{4}{e^2}$, abbiamo che $\sqrt[n]{a_n} = \text{Limite iniziale} = \frac{4}{e^2}$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n! + 8^n}{20^n + 7n!} = \frac{2}{7}$

Raccordo $n!$ sopra e sotto ...

$$\frac{\cancel{n!} \left(2 + \frac{8^n}{n!}\right)}{\cancel{n!} \left(\frac{20^n}{n!} + 7\right)} \rightarrow \frac{2}{7} \quad (\text{fattoriali battono esponenziali})$$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)! + 8^n}{20^n + 7n!}$

Raccordo $(2n)!$ sopra e $n!$ sotto

$$\frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{1 + \frac{8^n}{(2n)!}}{\frac{20^n}{n!} + 7}$$

$\downarrow$ $\rightarrow 0$
 0

Da parte calcolo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n!}$

Questo si può fare con il rapporto, oppure osservando che $(2n)! \geq (n+1)!$, da cui

$$\frac{(2n)!}{n!} \geq \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \quad \text{per confronto a 2.}$$

$\downarrow$ $\rightarrow +\infty$

Osservazione $(3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}}_{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$

$$a_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{4} ; a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} ; a_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} ; \dots$$

Errore classico: dire che il limite è 0 perché tutti gli addendi tendono a 0.

Procedimento corretto: intanto $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$a_n \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\substack{\text{termine +} \\ \text{grande della somma}}} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\text{numero dei termini}}$$

Quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{n+1}{n^2}$$

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{a_n}$. È ancora vero che i termini singolarmente tendono a 0.

Però

$$a_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\rightarrow +\infty} \quad [\text{termine + piccolo. numero termini}]$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{2n}} = \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{n}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 0} \rightarrow +\infty$$

Achtung! Posso dire che il limite della somma è la somma dei limiti quando il numero di addendi è fisso.

Nei due esempi precedenti

→ il singolo termine tende a 0

→ il numero dei termini tende a $+\infty$

In un certo senso si tratta di forme indefinite di tipo $0 \cdot (+\infty)$

— 0 — 0 —

Esercizio Funzioni pari / dispari

$$f(x) = \cos(x^3)$$

$$f(-x) = \cos((-x)^3) = \cos(-x^3) = \cos(x^3) = f(x) \quad \text{PARI}$$

$$f(x) = \cos^3(x) = [\cos x]^3$$

$$f(-x) = [\cos(-x)]^3 = [\cos x]^3 = f(x) \quad \text{PARI}$$

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

$$f(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -f(x) \quad \text{DISPARI}$$

$$f(x) = \cos(\sin x)$$

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x) \quad \text{PARI}$$

Quale delle 4 funzioni precedenti sono periodiche?

La 2^a, 3^a, 4^a sì, perché se cambio x con $(x+2\pi)$ la prima funzione trigonometrica che incontro annulla la differenza

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

Invece $\cos(x^3)$ NON è periodica !!! Dove vale $\cos(x^3) = 1$?

Dove $x^3 = 2k\pi$, cioè dove $x = \sqrt[3]{2k\pi}$ e questi punti non sono disposti ad intervalli regolari

$\cos x^3$: oscillazioni sempre più ravvicinate !!



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 018

Titolo nota

08/10/2011

Limiti di funzione: definizioni $A \subseteq \mathbb{R} \quad f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

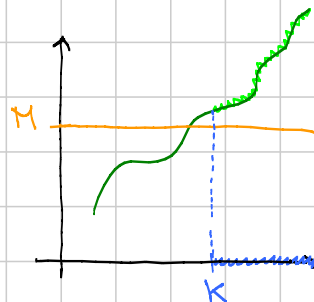
$$\nearrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\searrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

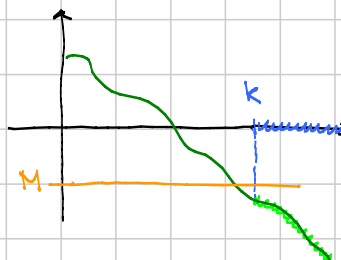
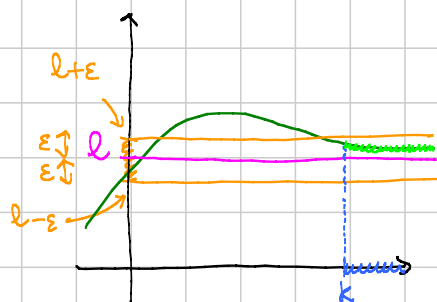
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \nearrow l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ \nearrow +\infty & \textcircled{2} \\ \rightarrow -\infty & \textcircled{3} \\ \searrow \text{NON esiste} & \textcircled{4} \end{cases}$$

Def. di ④: Nessuno dei precedentiDef. di ②: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \geq K$

$\uparrow$ dipende da M : più M è grande, più
bisognerà usare K grandi

Def. di ③: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo) $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \geq K$

$\uparrow$ dipende da M

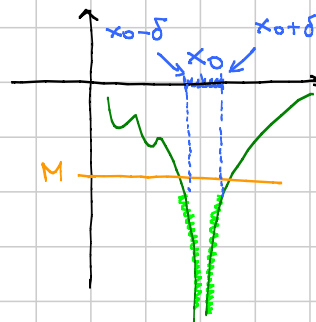
Def. di ①: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0) $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq K$ (equivalentemente $|f(x) - l| \leq \varepsilon$)distanza $\uparrow$ tra $f(x)$ ed l 

Oss. Il limite se ne frega del valore di f in x_0 ; $f(x)$ potrebbe anche non essere definita per $x = x_0$.

Def. di ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ b.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



Oss. Si intende, quando faccio il limite per $x \rightarrow x_0$, che $f(x)$ è definita almeno "dalle parti di x_0 ". In x_0 però potrebbe essere non definita

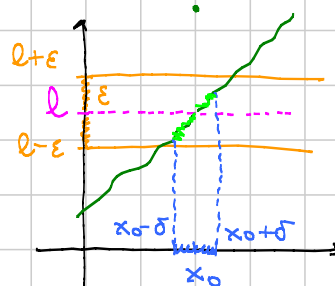
Def. di ① $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ (anche molto vicino a 0)}$$

$$\exists \delta > 0 \text{ b.c. } l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

— o — o —



$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ Stesse definizioni di sopra, ma la disuguaglianza per $f(x)$ deve valere $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$

intervallo destro di x_0
di ampiezza δ , tutto x_0

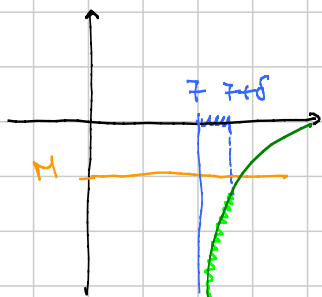
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ — o — o — $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$.

Adattamenti della definizione

$\lim_{x \rightarrow \tau^+} f(x) = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ b.c.}$$

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in (\tau, \tau + \delta]$$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \tau^+$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ b.c. } \tau < f(x) \leq \tau + \varepsilon \quad \forall x \leq K.$$

$$(0 < f(x) - \tau \leq \varepsilon)$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 019

Titolo nota

08/10/2011

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$.

Si dice che $f(x)$ è CONTINUA in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che $f(x)$ è CONTINUA in A se $f(x)$ è continua in ogni $x_0 \in A$.

Metateorema Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non presenta problemi burocratici (denominatori = 0, radici di roba < 0 , logaritmi di roba ≤ 0 , ...)

Esempio
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin x + \log_3(1 + \tan x)}{\cos(\arctan x)} = 9$$

Motivo: sostituendo $x = 0$ non si incontra nessun problema e si ottiene 9,

Secondo strumento: i teoremi algebrici e i teoremi di confronto (a 2 e a 3) valgono per i limiti di funzioni esattamente come per i limiti di successioni.
Stesso discorso per i confronti di ordini di infinito.

Esempio
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x}{x}$$

Numeratore $\rightarrow -\frac{\pi}{2}$
Denominatore $\rightarrow -\infty$

$$= \left[\frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} \right] = 0 \text{ (volendo } 0^+)$$

Esempio
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \sin\left(\frac{3x+2}{x^2}\right) \quad -1 \leq \sin(\text{Mostro}) \leq 1$$

Moltiplico per $\tan x$ (che è > 0 quando $x \rightarrow 0^+$)

$$-\tan x \leq \tan x \cdot \sin(\dots) \leq \tan x$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

LIMITI NOTEVOLI

Forme indeterminate classiche

PADRI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

FIGLI

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

NIPOTI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

↑
logaritmo in
base e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(3x)}{3x}} \cdot 3 = 3$

↓
1

Cambio di variabile nei limiti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$

Pongo $y = 3x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 3 \cdot 0 = 0$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^2 \rightarrow 1^2 = 1$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$

↑
Pongo $y = x^2$. Quando
 $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x}} \cdot \boxed{\frac{\arctan x}{x}}$

↓ ↓
1 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow \arctan 0 = 0$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}}$

$\downarrow y = \sin x$ $\downarrow 1$
 1 1

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x} = 0$

$-1 \leq \sin(\sin x) \leq 1$ Divido per x e cambio i versi perché $x \rightarrow -\infty$, quindi x è < 0

$-\boxed{\frac{1}{x}} \geq \frac{\sin(\sin x)}{x} \geq \boxed{\frac{1}{x}}$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\arctan(\cos x)}{\cos x}} \cdot \boxed{\frac{1}{\cos x}} = 1.$

$\downarrow 1$ $\downarrow 1$

NO!!! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$ (basta sostituire $x=0$)

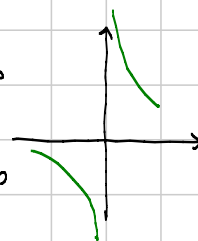
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x)}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow \textcircled{1}} \frac{\arctan y}{y} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow \cos 0 = \textcircled{1}$

Il limite iniziale fa $\frac{\pi}{4}$ (come posso vedere da subito con analisi preliminare: non era una forma indeterminata).

Esempio 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ N.E. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$



Fatto generale: se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ } se $l_1 \neq l_2$, allora
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ } $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ N.E.

Achtung! Quando denominatore $\rightarrow 0$ e numeratore $\rightarrow$ numero $\neq 0$ bisogna controllare se il den $\rightarrow 0^+$ oppure 0^- .

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 020

Titolo nota

08/10/2011

Aggiunta a limiti notevoli (NIPOTI): $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0$

CRITERIO FUNZIONI $\rightarrow$ SUCCESSIONI Utilizzo di limiti di funzioni per fare limiti di successioni: cambio di variabili tra funzioni e successioni.

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n}$ $[= +\infty \cdot 0]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $x \rightarrow 0$.

Achtung! Questo si può fare tutte le volte che il limite di funzioni che si trova esiste e $\in \bar{\mathbb{R}}$.

Se il limite di funzioni non esiste, allora boh (non si può dire nulla del limite di successioni iniziale).

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (\sqrt[n]{7} - 1)$ $[= +\infty \cdot (1-1) = +\infty \cdot 0]$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{7} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x} = \log 7$$

$x = \frac{1}{n}$
 $x \rightarrow 0$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ Pongo $y = \log x$. Quando $x \rightarrow +\infty$ ho che $y \rightarrow +\infty$. Inoltre $x = e^y$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0 \text{ perché esponenziale batte potenza.}$$

Fatto generale: il logaritmo perde alle potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\log n]^a}{n^b} = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$$

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(7+5^n)}{n+3} = \log 5$

Brutal mode: Numeratore $\sim \log 5^n = n \log 5$ Denominatore $\sim n$

Rigoroso: chi comanda si raccoglie

$$\begin{aligned} \frac{\log(7+5^n)}{n+3} &= \frac{\log[5^n(1+\frac{7}{5^n})]}{n(1+\frac{3}{n})} = \frac{n \log 5 + \log(1+\frac{7}{5^n})}{n(1+\frac{3}{n})} \\ &= \frac{\cancel{n}(\log 5 + \frac{\log(\quad)}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})} \rightarrow \frac{\log 1}{+\infty} = 0 \rightarrow \log 5. \end{aligned}$$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{n}-1) \quad [= +\infty \cdot (1-1)]$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \text{Base ed esponente strano!}$$

E-ALLA

$$\boxed{A^B = e^{\log A^B} = e^{B \log A}}$$

Quindi $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \log n}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \boxed{\log n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}}$$

Pongo $x = \frac{\log n}{n}$

Quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$ perché potenza batte logaritmo.

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\tan x \cdot \log \left(\frac{x}{x^2+1} \right)}$

Posso limitarmi a fare il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \log \left(\frac{x}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \{ \log x - \log(x^2+1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \{ \tan x \cdot \log x - \tan x \cdot \log(x^2+1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \boxed{\frac{\tan x}{x}} \cdot \boxed{x \log x} - \boxed{\tan x} \cdot \boxed{\log(x^2+1)} = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 0 0 0

L'esponente $\rightarrow 0$, quindi il limite iniziale è 1.

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]^{\frac{1}{\arctan(x^2)}}$ [= 1^{+\infty}]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\arctan(x^2)} \cdot \log(\cos x)}$$

Faccio il limite dell'esponente

$$\begin{aligned} \frac{\log(\cos x)}{\arctan(x^2)} &= \frac{x^2}{\arctan(x^2)} \cdot \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \\ &= \boxed{\frac{x^2}{\arctan(x^2)}} \cdot \boxed{\frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}} \cdot \boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}} \rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $y = \cos x - 1$ $-\frac{1}{2}$
 FORTUNA! $y \rightarrow 0$
 $\downarrow$
 1

Visto che esponente $\rightarrow -\frac{1}{2}$, il limite iniziale è $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Esempio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \arctan x} - \cos x + \arcsin(\log(1+2\sin x))}{\arctan(x+x^2) - x^{20}} = 5$$

Raccoglie x sopra e sotto

Sotto: $x \left\{ \frac{\arctan(x+x^2)}{x+x^2} \cdot \frac{x+x^2}{x} - x^{19} \right\}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 0

Sopra: $x \left\{ \frac{e^{3 \arctan x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} + \frac{\arcsin(\log(1+2\sin x))}{x} \right\}$

$\downarrow$
 $\frac{e^{3 \arctan x} - 1}{3 \arctan x} \cdot \frac{3 \arctan x}{x} \rightsquigarrow 3$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$\frac{\arcsin(\log(1+2\sin x))}{\log(1+2\sin x)} \cdot \frac{\log(1+2\sin x)}{2\sin x} \cdot \frac{2\sin x}{x}$
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 2

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 021

Titolo nota

12/10/2011

Dimostrazioni dei principali limiti notevoli

PADR1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ non lo dimostro, ma segue da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Oss. Se è vero per $x \rightarrow +\infty$, allora è vero per $n \rightarrow +\infty$ (criterio funzioni $\rightarrow$ successioni), ma qui servirebbe una specie di viceversa, che in generale è falso, ma in casi speciali come questo è vero.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Intanto basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Questo perché $\frac{\sin x}{x}$ è PARI.

Supponiamo di aver dimostrato che $\sin x \leq x \leq \tan x$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2})$
Allora divido per $\sin x$ e ottengo che

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \quad \text{per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

N.B.: ho mantenuto i versi perché $\sin x > 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Quindi

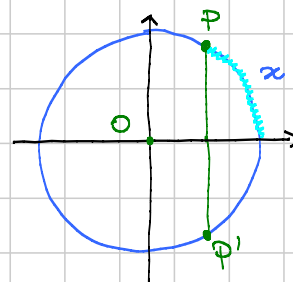
$$\boxed{1} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \text{per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\frac{1}{\cos 0} = 1$

Quindi per i carabinieri si ha che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$, da cui anche quello che volevamo.

Restava da dimostrare $\sin x \leq x$ e $\tan x \geq x$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\sin x \leq x$ lunghezza arco $\widehat{PP'} = 2x$
 lunghezza segmento $PP' = 2 \sin x$
 lunghezza segm. $\leq$ lunghezza arco
 $2 \sin x \leq 2x$



$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e \quad \text{Faccio il logaritmo a dx e sx}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y) = \log e = 1.$$

Questo dimostra il limite voluto, ma solo per $y \rightarrow 0^+$. Per fare lo stesso limite per $y \rightarrow 0^-$, basta partire dal $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dim.: pongo $y = e^x - 1$. Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow e^0 - 1 = 0$
Inoltre $y+1 = e^x$, quindi $x = \log(1+y)$.

Ma allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0 \quad (\text{vero anche con esponenti positivi su } x \text{ e } \log x)$$

Dim.: pongo $y = \frac{1}{x}$. Quando $x \rightarrow 0^+$ ho che $y \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\log y}{y} = 0$$

perché a $+\infty$ i log perdono dalle potenze.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Dim.: pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$, da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

$$\text{Analogamente} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \quad \left[= \frac{\sin \pi}{0} = \frac{0}{0} \right]$

Pongo $y = x - \pi$. Quando $x \rightarrow \pi$ ho che $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1$$

Precorso: $\sin(y + \pi) = -\sin y$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{e^x - e} \quad \left[= \frac{\log 1}{e - e} = \frac{0}{0} \right]$

Pongo $y = x - 1$. Quando $x \rightarrow 1$ ho che $y \rightarrow 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{e^x - e} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{e^{1+y} - e} = \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_1 \underbrace{\frac{y}{e(e^y - 1)}}_1 = \frac{1}{e}.$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 022

Titolo nota

12/10/2011

SOTTOSUCCESIONI Sia a_n una successione.

Considerare una s.succ. di a_n vuol dire "pescare un po' di termini" con indici strettamente crescenti

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots$$

Oss. Ci sono in giro due tipi di definizione

- più restrittiva: gli indici si pescano in maniera strett. crescente
- più generale: si può anche tornare indietro, ma gli indici devono comunque tendere a $+\infty$.

Esempi $a_{2n} =$ sottosuccessione costituita dai termini di indice pari
 $= a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

$$a_{2n+1} = \dots \text{ indici dispari} = a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$$

$$a_{4n+3} = a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, a_{19}, \dots \text{ (di 4 in 4 a partire da 3)}$$

$$a_{n^2} = a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots$$

$$(a_n)^2 = a_0^2, a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$$

Caso speciale $a_{n+k} = a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots$

Questa pesca tutti i termini da un certo punto in poi.

In un certo senso è una sottosuccessione FINITA, ottenuta solo shiftando gli indici.

Teorema Sia a_n una successione. Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora TUTTE le sottosuccessioni di a_n tendono allo stesso l .

Achtung! Se a_n è indeterminata, cioè il suo limite non esiste, non è detto che anche una sua sottosuccessione sia indeterminata.

Esempio $a_n = (-1)^n$ $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
 a_n non ha limite. Tuttavia
 $a_{2m} \rightarrow 1$ e $a_{2m+1} \rightarrow -1$, quindi queste 2 sottosucc.
 hanno limite,
 a_{n^2} invece è $1, -1, 1, -1, \dots$ e quindi non ha limite.

Conseguenza del teorema. Sia a_n una successione. Supponiamo che

- esista una sottosuccessione che ha un limite $l_1 \in \mathbb{R}$
- " un'altra " " " " $l_2 \in \mathbb{R}$
- $l_1 \neq l_2$.

Allora a_n non ha limite.

Dim.: se per assurdo avessimo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora tutte le sottosucc.
 dovrebbero tendere allo stesso limite l .

Operativamente: se voglio dimostrare che il limite di a_n non esiste, mi
 basta trovare 2 sottosuccessioni con limiti diversi.

Esempio 1 $a_n = n^2 + (-1)^n n^3$. Provo con i pari ed i dispari.

$$a_{2m} = (2m)^2 + (-1)^{2m} (2m)^3 = 4m^2 + 8m^3 \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= (2m+1)^2 + (-1)^{2m+1} (2m+1)^3 = (2m+1)^2 - (2m+1)^3 \\ &= (2m+1)^2 (\cancel{x} - 2m \cancel{x}) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

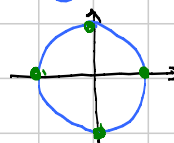
Esempio 2 $a_n = n^3 + (-1)^n n^2$. Ora $a_n \rightarrow +\infty$

$$a_n = \underbrace{n^3}_{\rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\rightarrow 0} \right) \rightarrow +\infty \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \leq \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\rightarrow 0} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}$$

Esempio 3 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ $0, 1, 0, -1, 0$

$$a_{2m} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2m\right) = \sin(\pi m) \rightarrow 0$$

$$a_{4m+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} (4m+1)\right) = \sin\left(2\pi m + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1$$



Come dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste? ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$)

Basta trovare 2 successioni a_n e b_n tali che

- ① $a_n \rightarrow x_0$, $b_n \rightarrow x_0$
- ② $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno 2 limiti diversi.

Dim.: Supponiamo per assurdo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{Stesso discorso per } f(b_n)$$

$\uparrow$
 Poiché $x = a_n$. Quando $n \rightarrow +\infty$
 ho che $x \rightarrow x_0$

Quindi tenderebbero ad l entrambi.

Esempio 4 Voglio dim. che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ non esiste.

Per dimostrarlo devo trovare 2 successioni a_n e b_n tali che

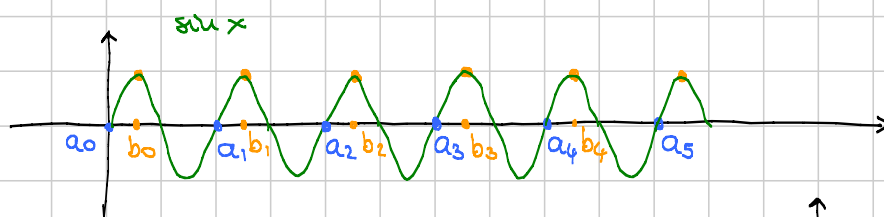
- ① $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$
- ② $\sin a_n \rightarrow l_1$, $\sin b_n \rightarrow l_2 \neq l_1$.

$$a_n = 2\pi n \rightarrow +\infty$$

$$\sin a_n = \sin(2\pi n) = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$$

$$\sin b_n = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1.$$



Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x^2}$ N.E.



Devo trovare a_n e b_n tali che

- ① $a_n \rightarrow 0^+$, $b_n \rightarrow 0^+$
- ② $\cos \frac{1}{a_n^2} \rightarrow l_1$, $\cos \frac{1}{b_n^2} \rightarrow l_2 \neq l_1$

Dove si ha che $\cos \frac{1}{a_n^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n^2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

Quindi posso prendere $a_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$, cioè $a_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi n}} \rightarrow 0^+$

Dove si ha che $\cos \frac{1}{b_n^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b_n^2} = 2\pi n$

Quindi posso prendere $b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0^+$.

$a_n \rightarrow 8 \Rightarrow a_{2n} \rightarrow 8$ VERA (teo. s.succ.)

$a_{2n} \rightarrow 8 \Rightarrow a_n \rightarrow 8$ FALSA (8, -1, 8, -1, 8, -1, 8, -1, ...)

$a_n \rightarrow 12 \Rightarrow a_{n^2} \rightarrow 12$ VERA (s.succ.)

$a_{n^2} \rightarrow 12 \Rightarrow a_n \rightarrow 12$ FALSA $a_n = 12$ se $n = \square$ e $a_n = 0$ altrimenti

$a_n \rightarrow 3 \Rightarrow a_{n+5} \rightarrow 3$ VERA (s.succ.)

$a_{n+5} \rightarrow 3 \Rightarrow a_n \rightarrow 3$ VERA (s.succ. FINTA)

$a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sin(a_n)$ non ha limite FALSA

(ad esempio $a_n = 2\pi n$)

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 023

Titolo nota

13/10/2011

SUCCESIONI MONOTONEDef. Una successione a_n si dice

- debolmente crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- strettamente " " $a_{n+1} > a_n$ " " "
- debolmente decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$ " " "
- strettamente " " $a_{n+1} < a_n$ " " "

Oss. Una a_n è debolmente crescente se e solo se

$$a_m \geq a_n \quad \text{per ogni } m \geq n$$

Idem per le altre 4 possibilità.

Questi sono 2 modi equivalenti di dare la stessa definizione.

Oss. Se a_n è strettamente crescente, allora è pure debolmente crescente.Teorema (in versione crescente). Sia a_n una successione debolmente crescente (se è crescente strett., allora meglio).Allora a_n ha solo 2 possibilità: $a_n \rightarrow +\infty$ oppure $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.Inoltre $a_n \rightarrow L =$ estremo superiore (può essere $+\infty$ oppure $\in \mathbb{R}$).Teorema (in versione decrescente). Sia a_n debolmente decrescente.Allora $a_n \rightarrow l =$ estremo inferiore (può essere $-\infty$ oppure $\in \mathbb{R}$).Corollario Sia a_n una succ. Supponiamo che(i) a_n debolmente crescente,(ii) a_n limitata superiormente, cioè ha almeno un maggiorante,
cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.Allora $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (cioè è di tipo ①).

Idem con decrescente e limitata inferiormente.

Dim. teorema in versione crescente Ci sono 2 casi.

Caso 1: $\sup = +\infty$ Ipotesi: il sup della successione è $+\infty$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

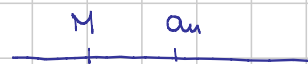
L'ipotesi è equivalente a dire che

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \text{ b.c. } a_n \geq M$$

La tesi è equivalente a dire che

$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ si ha che } a_n \geq M \text{ definitivamente.}$$

Ora la successione è debolmente crescente, quindi se supera M per un valore di n , lo supera anche per tutti i valori successivi, quindi lo supera definitivamente.



Caso 2: $\sup = L \in \mathbb{R}$ Ipotesi: il sup della successione è un certo $L \in \mathbb{R}$

Tesi: $a_n \rightarrow L$

L'ipotesi è equivalente a dire che

$$(i) a_n \leq L \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \text{ b.c. } a_n \geq L - \varepsilon$$

La tesi è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ si ha che } L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Quindi:

fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $a_n \geq L - \varepsilon$ per un certo valore di n .

Per la debole crescita avevamo che $a_n \geq L - \varepsilon$ per tutti i valori successivi, quindi $a_n \geq L - \varepsilon$ definitivamente. D'altra parte $a_n \leq L \leq L + \varepsilon$ per ogni n , quindi definitivamente.



Esercizio: riscrivere la dimostrazione in versione decrescente.

— o — o —

Il numero e Consideriamo la successione $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Allora ① $e_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

② e_n è debolmente crescente (anzi strettamente)

③ $e_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per il teo. sulle succ. monotone questo dice che $a_n \rightarrow l \in (2, 3]$

Dim ① Considero la disug di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$
 Ponendo $x = \frac{1}{n}$ ottengo che

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

Dim. ② Devo dimostrare che $e_n \geq e_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} e_n \stackrel{?}{\geq} e_{n-1} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{?}{\geq} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \stackrel{?}{\geq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \stackrel{?}{\geq} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \stackrel{?}{\geq} \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^{2n}} \stackrel{?}{\geq} \frac{n-1}{n} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \stackrel{?}{\geq} \frac{n-1}{n} \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \stackrel{?}{\geq} 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Considero nuovamente $(1+x)^n \geq 1+nx$ (vera $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1$)
 e la applico con $x = -\frac{1}{n^2}$, che è > -1 . Ottengo

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Questo dimostra l'ultima disuguaglianza della catena, che però è
 equivalente alla 1^a, che era $e_n \geq e_{n-1}$.

Dim di ③. Devo dimostrare che $e_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{lo sviluppo con il binomio di Newton}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Quindi

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} \quad (\text{uso seconda versione})$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}$$

Al numeratore ho
k termini: $n, n-1, n-2, \dots$
Al denominatore ho
k termini: $n, n, n, \dots$

$$\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

< 2

$$\leq 3.$$

Oss. Perché $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} < 2$?

$$1 + a + a^2 + \dots + a^k = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} \leq \frac{1}{1-a}$$

dim. per induzione.

Quando $a = \frac{1}{2}$ viene proprio 2.

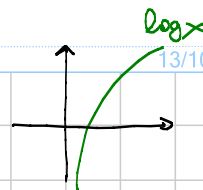
— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 024

Titolo nota

13/10/2011

Esercizio 1 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \left[\frac{-\infty}{-1} \right] = +\infty$



La funzione è definita per $x \neq 0$ e $1+x > 0$, cioè $x > -1$. Quindi è definita in $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Quindi ha senso fare il limite per $x \rightarrow -1^+$, ma non per $x \rightarrow -1$.

Esercizio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 0 \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Brutale: $\frac{\log(1+x)}{x} \sim \frac{\log x}{x} \rightarrow 0$ perché log perde delle potenze

Rigoroso: $\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x} = \frac{\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x}$

$$= \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{(tabellina)}}} + \underbrace{\frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x}}_{\downarrow 0} \rightarrow \left[\frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \right]$$

Esercizio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3)}{\log(1+3x^2 \sin x)} = \frac{1}{3} \quad \left[= \frac{0}{0} \right]$

$$\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+3x^2 \sin x)} = \frac{\log(1+x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{3x^2 \sin x} \cdot \frac{3x^2 \sin x}{\log(1+3x^2 \sin x)}$$

$\downarrow y = x^3 \quad \downarrow \frac{1}{3} \quad \downarrow y = 3x^2 \sin x$
 $\downarrow 1 \quad \downarrow \frac{1}{3} \quad \downarrow 1$

Esercizio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)}$

$$\frac{\log(1+x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)}$$

$\downarrow 1 \quad \downarrow +\infty \quad \downarrow 1$

NO!!! I limiti notevoli usati valgono per $x \rightarrow 0$, non per $x \rightarrow +\infty$!!!

Brutale: $\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)} \sim \frac{\log x^3}{\log x^2} = \frac{3 \log x}{2 \log x} \rightarrow \frac{3}{2}$

Rigoroso: $\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)} = \frac{\log[x^3(\frac{1}{x^3}+1)]}{\log[x^2(\frac{1}{x^2}+1)]} = \frac{3 \log x + \log(\frac{1}{x^3}+1)}{2 \log x + \log(\frac{1}{x^2}+1)}$

$$= \frac{\cancel{\log x} \left[3 + \frac{\log(\frac{1}{x^3}+1)}{\log x} \right]}{\cancel{\log x} \left[2 + \frac{\log(\frac{1}{x^2}+1)}{\log x} \right]} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$\downarrow$
 $\circ \quad \left[= \frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \right]$

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3x^3}{4\sqrt{x} + 5x^3} = \frac{3}{5}$ (raccolgo x^3 sopra e sotto)

Brutale: $\frac{---}{---} \sim \frac{3x^3}{5x^3} \rightarrow \frac{3}{5}$

Esercizio 6 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} + 3x^3}{4\sqrt{x} + 5x^3} = \frac{1}{2}$

Brutale: $\frac{---}{---} \sim \frac{2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2}$

Rigoroso: raccolgo $\sqrt{x}$ sopra e sotto:

$$\frac{2\sqrt{x} + 3x^3}{4\sqrt{x} + 5x^3} = \frac{\cancel{\sqrt{x}} [2 + 3x^2\sqrt{x}]}{\cancel{\sqrt{x}} [4 + 5x^2\sqrt{x}]} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\uparrow$
 $\circ$
 $\downarrow$
 $\circ$

Fatto generale: a $+\infty$ comandano le potenze di x con esponente più grande, a 0 comandano le potenze con esponente più piccolo.

Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\sin x} - \cos x}{\arctan(5x)} = \frac{2}{5} \quad \left[\frac{1-1}{0} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{e^{x+\sin x} - \cos x}{\arctan(5x)} &= \frac{e^{x+\sin x} - 1 + 1 - \cos x}{\arctan(5x)} = \\ &= \frac{e^{x+\sin x} - 1 + 1 - \cos x}{5x} \cdot \frac{5x}{\arctan(5x)} \\ &= \left(\frac{e^{x+\sin x} - 1}{5x} + \frac{1 - \cos x}{5x^2} \cdot x \right) \frac{5x}{\arctan(5x)} \\ &= \left(\frac{e^{x+\sin x} - 1}{x + \sin x} \cdot \frac{x + \sin x}{5x} + \frac{1 - \cos x}{5x^2} \cdot x \right) \frac{5x}{\arctan(5x)} \rightarrow \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$y = x + \sin x \downarrow 1$
 $= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{\sin x}{x} \downarrow \frac{2}{5}$
 $\frac{1 - \cos x}{5x^2} \cdot x \downarrow \frac{1}{10} \cdot 0$
 $\frac{5x}{\arctan(5x)} \downarrow 1$

Esercizio 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \quad [= \infty - \infty]$

Razionalizzazione: $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B}) \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

$$(\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}) \cdot \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{\cancel{x^2} + 3x + 1 - \cancel{x^2} - 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Brutale: $\sim \frac{3x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{3x}{2x} \rightarrow \frac{3}{2}$

Rigrosso: raccolgo x sopra e raccolgo x^2 nelle radici

Esercizio 9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 3} - \sqrt[3]{x^4 + 4} \quad [= +\infty - \infty]$

Se le radici sono di indice diverso, la razionalizzazione non è possibile.

Brutale: $\sqrt{x^3 + 3} - \sqrt[3]{x^4 + 4} \sim \sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{4}{3}} \rightarrow +\infty$

Rigoroso: raccogliere quello che bisogna...

Esercizio 10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3}$

Come razionalizzare la differenza di 2 radici cubiche?

Achtung! $(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) \neq A - B$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Uso questa relazione con $a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$. Ottengo

$$A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \cdot (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}) \quad \text{Quindi}$$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \cdot \frac{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}$$

Nell'esercizio 10 si tratta di applicare questa formula con

$$A = x^3 + x^2 + 2 \quad \text{e} \quad B = x^3 \dots$$

Oss. Con lo stesso metodo si tratta $\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B} \dots$

$$\underbrace{\arctan x^3}_{f(x)} = o(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

1° modo: $\arctan x^3 = \underbrace{x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{\arctan x^3}{x^2}}_{w(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\arctan x^3}{x^3}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow 0} = 0$$

2° modo: divido e ottengo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^3}{x^2} = \dots = 0.$

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} = o\left(\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{g(x)}\right) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

3° modo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$

N.B. In questo esempio $f(x)$ e $g(x)$ non tendono a 0 per $x \rightarrow x_0 = 0$.

Proprietà di o piccolo Supponiamo

$$f_1(x) = o(g(x))$$

$$f_2(x) = o(g(x))$$

per $x \rightarrow x_0$

Cosa possiamo dire di $f_1 \pm f_2$ $f_1 \cdot f_2$ f_1/f_2 ?

Ipotesi: $f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x)$

$$f_2(x) = g(x) \cdot w_2(x)$$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\{w_1(x) + w_2(x)\}}_{= w_3(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{w_1(x)}_{\downarrow 0} + \underbrace{w_2(x)}_{\downarrow 0} = 0$$

Questo mostra che $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$. Allo stesso modo
 $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$

Prodotto: $f_1(x) \cdot f_2(x) = [g(x)]^2 \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) \cdot w_2(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

Questo dice che $f_1(x) \cdot f_2(x) = o([g(x)]^2)$ per $x \rightarrow x_0$.

Quoziente: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot w_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot w_2(x)} = \frac{w_1(x)}{w_2(x)} = w_3(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_1(x)}{w_2(x)} = \frac{0}{0} = \text{Boh !!}$ Non si può dire nulla

Brutalmente: f_1 batte g , f_2 batte g , ma questo non permette di confrontare f_1 ed f_2 .

Notazione rapida: $o(g) + o(g) = o(g)$, $o(g) - o(g) = o(g)$
 $o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$, $\frac{o(g)}{o(g)} = \text{Boh}$

Moltiplicazione per costante: se $f(x) = o(g(x))$, allora $\exists f(x) = o(g(x))$

Dim.: $f(x) = g(x) \cdot w(x)$, allora $\exists f(x) = g(x) \cdot \underbrace{\exists w(x)}_{w_1(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \exists w(x) = \exists \cdot 0 = 0$

Costante dentro: se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow 0$, allora
 $f(\exists x) = o(g(\exists x))$ per $x \rightarrow 0$

Dim.: $f(x) = g(x) \cdot w(x)$, allora $f(\exists x) = g(\exists x) \cdot \underbrace{w(\exists x)}_{w_1(x) \dots}$

Composizione di o piccolo

Se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(r(x))$, allora $f(x) = o(r(x))$

Dim.: $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot w_1(x) \quad w_1(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0$
 $g(x) = o(r(x)) \Leftrightarrow g(x) = r(x) \cdot w_2(x) \quad w_2(x) \rightarrow 0 \quad "$

Ma allora

$f(x) = g(x) \cdot w_1(x) = r(x) \cdot \underbrace{w_2(x) \cdot w_1(x)}_{w_3(x)}$

e $w_3(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$ [$o(o(r)) = o(r)$]

Esempio 1 Quando si ha che $x^k = o(x^a)$ per $x \rightarrow 0$?

$$\text{2° modo} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{k-a} = 0$$

se e solo se $k > a$

Esempio 2 $\sin x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

$$\text{2° modo} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x = 0$$

Esempio 3 $\sin^2(x^2) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{2° modo} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x^4} \cdot x^3 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x^2}{x^2} \right]^2 \cdot x^3 = 1^2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Alternativa: sappiamo che $\sin(x^2) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Moltiplicando (o elevando al quadrato) ottengo

$$\sin^2(x^2) = o(x^2) = o(x)$$

↓ per via dell'esempio 1.

Esempio 4 Supponiamo $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Allora $f(\arctan x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Dim.: $f(x) = o(x)$ vuol dire che $f(x) = x \cdot w(x)$. Allora

$$f(\arctan x) = \arctan x \cdot w(\arctan x) = x \cdot \underbrace{\frac{\arctan x}{x} \cdot w(\arctan x)}_{w_1(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w_1(x) = 1 \cdot 0 = 0, \text{ quindi } f(x) = o(x).$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 026

Titolo nota

14/10/2011

Applicazioni di o piccolo al calcolo di limiti**SVILUPPINI** Per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

 $\sin x = x + o(x)$ Devo dimostrare che $\sin x - x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Utilizzo la def. quasi equivalente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Allo stesso modo si dimostrano gli sviluppi di $\tan x$, $\arctan x$, $\arcsin x$ **$e^x = 1 + x + o(x)$** Devo dimostrare che $e^x - 1 - x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Dividendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

Anche $\log(1+x)$ si fa allo stesso modo. **$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$** Devo dim. che $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2)$

$$\text{Dividendo: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$\downarrow$
 $-\frac{1}{2}$

 $\cos x = 1 + o(x)$ Devo dimostrare che $\cos x - 1 = o(x)$

Uso ovviamente la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Alternativa: parto dal precedente $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\begin{aligned} & \downarrow \quad \quad \downarrow \\ & o(x) \quad o(o(x)) = o(x) \\ & = 1 - o(x) + o(x) = 1 + o(x) \end{aligned}$$

— o — o —

Esempio 1 $\sin(3x) = 3x + o(x)$

Sappiamo che $\sin x = x + o(x)$, cioè $\sin x = x + x \omega(x)$

Allora $\sin(3x) = 3x + \underbrace{3x \cdot \omega(3x)}_{\omega_1(x)} = 3x + x \underbrace{\omega_1(x)}_0$

Esempio 2 $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$

Sappiamo che $\sin x = x + x \cdot \omega(x)$, quindi $\sin x^2 = x^2 + x^2 \cdot \underbrace{\omega(x^2)}_{\omega_1''(x) \rightarrow 0}$

Esempio 3 $\sin(x^2) = x^2 + o(x)$

1° modo: come prima $\sin x^2 = x^2 + x^2 \cdot \omega(x^2) = x^2 + x \cdot \underbrace{x \omega(x^2)}_{\omega_1(x) \rightarrow 0}$

2° modo: come prima $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) = x^2 + o(o(x)) = x^2 + o(x)$

Osservazione: $\sin(x^2) = x^2 + o(x) = o(x) + o(x) = o(x)$

Esempio 4 $\sin(\arctan x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Sappiamo che $\sin x = x + x \cdot \omega(x)$, quindi

$$\begin{aligned} \sin(\arctan x) &= \underbrace{\arctan x}_{x + o(x)} + \arctan x \cdot \omega(\arctan x) \\ &= x + o(x) + x \cdot \underbrace{\frac{\arctan x}{x} \cdot \omega(\arctan x)}_{\omega_1(x) \rightarrow 0} \\ &= x + o(x) + o(x) \\ &= x + o(x) \end{aligned}$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\tan x + 2 \arcsin x}$

Uso gli sviluppi:

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \cos x = 1 + o(x)$$

$$\text{Numeratore} = \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x) \quad \arcsin x = x + o(x)$$

$$\text{Denominatore} = x + o(x) + 2x + 2o(x) = 3x + o(x)$$

$$\text{Frazione} = \frac{x + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(3 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Vecchia maniera:

$$\frac{e^x - \cos x}{\tan x + 2 \arcsin x} = \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x}{\tan x + 2 \arcsin x} = \frac{\cancel{x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \overset{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\frac{\tan x}{x} + 2 \frac{\arcsin x}{x} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x) - 2 \arctan(5x)}{\tan(2x) + e^{3x} - 1} = -\frac{7}{5}$

$$\log(1+3x) = 3x + o(x) \quad \arctan(5x) = 5x + o(x)$$

$$\text{Num} = 3x + o(x) - 10x - 2o(x) = -7x + o(x)$$

$$\tan(2x) = 2x + o(x) \quad e^{3x} = 1 + 3x + o(x)$$

$$\text{Denom} = 2x + o(x) + \cancel{1} + 3x + o(x) - \cancel{1} = 5x + o(x)$$

$$\text{Frazione} = \frac{-7x + o(x)}{5x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(-7 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(5 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow -\frac{7}{5}$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\sin x} - 1}{\arctan(\arcsin(3x))} = \frac{2}{3}$

Brutale: $\text{Frazione} \sim \frac{e^{2x} - 1}{\arctan(3x)} \sim \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \frac{\cancel{x} 2 \cancel{x} + 1}{3x} = \frac{2}{3}$

$e^{x+\sin x}$. Sappiamo che $e^t = 1+t+o(t)$, quindi

$$e^{x+\sin x} = 1 + x + \underbrace{\sin x}_{x+o(x)} + o(x+\sin x)$$

$$o(x+\sin x) = o(x+x+o(x)) = o(2x+o(x)) \stackrel{?}{=} o(2x) + o(o(x)) \\ = o(x) + o(x) = o(x)$$

Domanda: $o(\text{somma}) = \text{somma degli } o \text{ piccolo}$.

Cioè: se $f(x) = o(g_1(x) + g_2(x))$, possiamo dire che
 $f(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x))$?

Dim.: $f(x) = o(g_1(x) + g_2(x))$ vuol dire
 $f(x) = \{g_1(x) + g_2(x)\} \cdot w(x)$ con $w(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$
 $= g_1(x) \cdot w(x) + g_2(x) \cdot w(x)$
 $= o(g_1(x)) + o(g_2(x))$

$$\arctan(\arcsin(3x)) = \arcsin(3x) + o(\arcsin(3x))$$

↑
uso $\arctan t = t + o(t)$

$$\begin{aligned} &= 3x + o(3x) + o(x + o(3x)) \\ &= 3x + o(x) + o(x + o(x)) \\ &= 3x + o(x) + o(x) + o(o(x)) \\ &= 3x + o(x) + o(x) + o(x) \\ &= 3x + o(x) \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 027

Titolo nota

14/10/2011

o piccolo - O grande - Equivalenza asintotica
 ↓
 futuro

Def. Siano $f(x), g(x), x_0$ come nella definizione di o piccolo.

Si dice che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste $w(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

Def. quasi equivalente. Quando posso dividere si ha che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Sviluppini con equivalenza asintotica Per $x \rightarrow 0$ si ha che

$$\begin{array}{llll} \sin x \sim x & \tan x \sim x & \arctan x \sim x & \operatorname{arcsin} x \sim x \\ \log(1+x) \sim x & e^x - 1 \sim x & \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} & \end{array}$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \tan x}{e^x - 1 + 3 \arctan x} = \frac{3}{4}$

$$\sin x \sim x, \quad 2 \tan x \sim 2x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 3 \arctan x \sim 3x$$

$$\text{Frazione} \sim \frac{3x}{4x} \sim \frac{3}{4}$$

Tecnica classica:

$$\frac{\cancel{x} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \frac{\tan x}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + 3 \frac{\arctan x}{x} \right)} \rightarrow \frac{1+2}{1+3}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 2}{\cos x - 1} = +\infty$ [$\frac{-1}{0^-}$: non è una forma indeterminata]

Al denominatore c'è 0^- perché $\cos x - 1 \leq 0$ sempre

Cosa succedeva facendolo con 0 piccolo:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + o(\sin x) = 1 + x + o(x) + o(x) = 1 + x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$o(\sin x) = o(x + o(x)) = o(x) + o(o(x)) = o(x) + o(x) = o(x)$$

Numeratore: $e^{\sin x} - 2 = 1 + x + o(x) - 2 = -1 + x + o(x)$ e da qui mi accorgo che il numeratore tende a -1 .

$$\text{Denominatore: } \cos x - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Frazione ; $\frac{-1 + x + o(x)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{\boxed{\frac{1}{x^2}} \cdot \boxed{-1 + x + o(x)}}{\boxed{-\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{o(x^2)}{x^2}}}$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \quad \quad 0$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\arcsin(2x)}$

Numeratore: $e^x - \cos x - x$

$$= [\cancel{1} + \cancel{x} + o(x)] - [\cancel{1} + o(x)] - \cancel{x} = o(x)$$

Denominatore: $\arcsin(2x) = 2x + o(x)$

Frazione: $\frac{o(x)}{2x + o(x)} = \frac{o(x)}{x \left(2 + \frac{o(x)}{x}\right)} = \frac{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}{2 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}} \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0$

Achtung! Se alla fine resta $\frac{o(x)}{o(x)}$, allora non si può dire nulla.

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x + \arctan(x^3) + \arcsin(2x)}{e^{3 \tan x} - 1} = \frac{2}{3}$

Fatto generale: tutte le potenze con esponente > 1 sono "unauguale" da $o(x)$. Detto altrimenti

$$\arcsin(2x) = 2x + o(x)$$

$$\arctan(x^3) = x^3 + o(x^3) = o(x) + o(x) = o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$(\sin x)^4 = x^4 + o(x^4) \quad \text{Perché?}$$

Usiamo la definizione: devo dim. che $(\sin x)^4 - x^4 = o(x^4)$

Divido:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^4 - x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Quindi numeratore} = 2x + o(x)$$

$$\text{Denominatore} = 3x + o(x) \dots$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{\arctan x} = \left[\frac{+\infty}{\frac{\pi}{2}} \right] = +\infty$

In questo limite $x \rightarrow +\infty$, quindi non posso usare gli sviluppi che sono per $x \rightarrow 0$!!!

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \frac{3}{n} \cdot (\sqrt[n]{3} - 1)^{-1}$

$$\arctan \frac{3}{n} \cdot (3^{\frac{1}{n}} - 1)^{-1} \quad \text{Pongo } x = \frac{1}{n}. \text{ Quando } n \rightarrow +\infty \text{ ho che } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ottengo } \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(3x) \cdot (3^x - 1)^{-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{3^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{e^{x \log 3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{\cancel{x} + x \log 3 - \cancel{x} + o(x)} = \frac{3}{\log 3} \end{aligned}$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]^{\frac{1}{\tan(\sin(2x^2))}}$

lo scrivo come
$$e^{\log(\cos x) \cdot \frac{1}{\tan(\sin(2x^2))}}$$

Considero il solo esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\tan(\sin(2x^2))}$$

Denominatore: $2x^2 + o(x^2)$

$$\begin{aligned} \tan(\sin(2x^2)) &= \sin(2x^2) + o(\sin(2x^2)) \\ &= 2x^2 + o(2x^2) + o(2x^2 + o(2x^2)) \\ &= 2x^2 + o(x^2) + o(2x^2 + o(x^2)) \\ &= 2x^2 + o(x^2) + o(x^2) + o(o(x^2)) \dots \end{aligned}$$

Numeratore: $\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

$$\text{con } t = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{Frazione} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{x^2 \dots}{x^2 \dots} \rightarrow -\frac{1}{4}$$

Poiché esponente $\rightarrow -\frac{1}{4}$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \text{originario} = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 028

Titolo nota

15/10/2011

Def. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $h \neq 0$. Si definisce rapporto incrementale la frazione

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\text{incremento della variabile } y}{\text{incremento della variabile } x}$$

Quando passo da x_0 a x_0+h , la variabile x si muove di h , la variabile y si muove da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$, quindi il suo incremento è pari al numeratore della frazione,

Significato geometrico

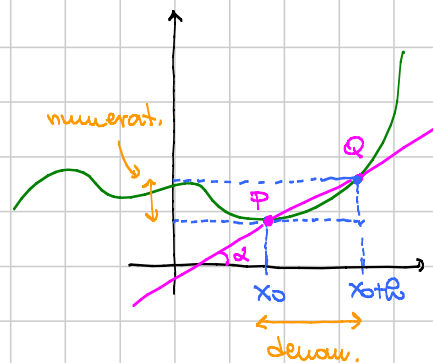
Dati P e Q i p.ti del grafico

corrispondenti a x_0 e x_0+h , cioè

$$P = (x_0, f(x_0)), \quad Q = (x_0+h, f(x_0+h))$$

si ha che

$$\begin{aligned} \text{rapp. incrementale} &= \text{coeff. angolare retta } PQ \\ &= \tan \alpha \end{aligned}$$



Def. Si dice che $f(x)$ è derivabile nel p.to x_0 se esiste ed è in $\mathbb{R}$ il limite del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad f^{(1)}(x_0), \quad \dot{f}(x_0)$$

Osservazione Se $f(x)$ è derivabile per ogni x in un certo insieme, posso considerare la funzione derivata, cioè quella che ad ogni x_0 e insieme associa $f'(x_0)$

Derivate successive. Facendo la derivata della derivata si ottiene la derivata 2^a, e così via.

Possibili notazioni:

$$\begin{array}{cccc} f''(x_0), & \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), & f^{(2)}(x_0), & \ddot{f}(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{d^k f}{dx^k}(x_0), & f^{(k)}(x_0), & & \end{array}$$

Significato geometrico

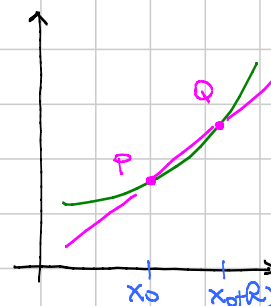
Quando $h \rightarrow 0$, il p.to Q tende al p.to P,
La retta PQ tende alla retta tangente al
grafico in P, quindi

$$\text{rap. increment.} = \text{coeff. ang. retta PQ}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$f'(x_0) = \text{coeff. ang. retta tangente in P}$$

Quindi la derivata in x_0 è il coeff. angolare della retta tangente
al grafico nel p.to $P = (x_0, f(x_0))$.



Equazione retta tangente Si tratta di scrivere l'eq. della retta che
passa per P e ha coeff. ang. $f'(x_0)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Stessa definizione in termini di o piccolo

Dire che esiste la derivata $f'(x_0)$ in un p.to x_0 è la stessa cosa
che dire che vale questa formula

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

"Dim." Supponiamo che sia vera la scrittura con o piccolo.

Dimostro che esiste il limite del rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0) \cdot h + o(h)}{h} = f'(x_0) + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{\rightarrow 0} \rightarrow f'(x_0)$$

Viceversa: supponiamo che esista il limite del rapp. increment., cioè

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Dimostro che vale la scrittura con o piccolo, cioè

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h = o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Per dim. divido per h e passo al limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Significato geometrico scrittura con o piccolo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

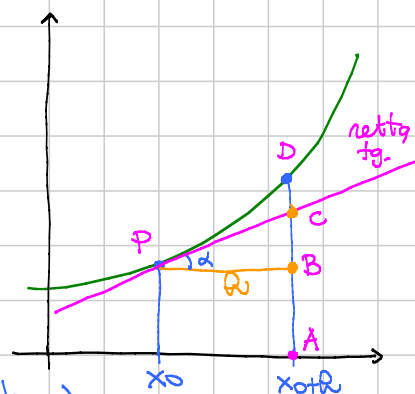
$$AD = AB + BC + CD$$

Nella figura

$$AD = f(x_0+h)$$

$$AB = f(x_0)$$

$$BC = f'(x_0) \cdot h \quad (\text{formula per i triangoli rettangoli: } \frac{BC}{PB} = \tan \alpha = f'(x_0))$$



Cosa succede quando $h \rightarrow 0$?

- AB resta fisso (si sposta, ma la sua lunghezza non varia)
- $BC \rightarrow 0$ linearmente rispetto ad h (se dimezzo h , dimezza anche BC)
- $CD \rightarrow 0$ più velocemente di h , cioè è $o(h)$.

Teorema Se $f(x)$ è derivabile in x_0 , allora $f(x)$ è continua in x_0 .

Dim. Devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Per farlo pongo $h = x - x_0$.

Quando $x \rightarrow x_0$ ho che $h \rightarrow 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{o} + f(x_0) \right] = f(x_0).$$

Oss. Non vale il viceversa, cioè una funzione può essere continua, ma non derivabile, in un pto x_0 .

Esempio classico $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

(andando a 0^+ la retta tangente avrebbe coeff. ang. = 1)



$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

(ora $h < 0$ perché $h \rightarrow 0^-$, quindi $|h| = -h$).

(andando a 0^- , la retta tangente avrebbe coeff. ang. = -1).

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 029

Titolo nota

15/10/2011

Derivate di alcune funzioni elementariEsempio 1 $f(x) = x^2$. Calcolo $f'(x_0)$

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ modo: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + \cancel{h^2} - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 = f'(x_0) \end{aligned}$$

Quindi $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$2^\circ \text{ modo: } f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{2x_0}_{\text{il coeff. di } h \text{ è proprio } f'(x_0)} h + \underbrace{h^2}_{o(h)}$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$ (non risulterà $f'(x) = e^x$)

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ modo: } f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_1 = e^{x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ modo: } f(x_0+h) &= e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = \text{(uso sviluppo di } e^h) \\ &= e^{x_0} (1 + h + o(h)) \\ &= e^{x_0} + e^{x_0} h + e^{x_0} \cdot o(h) \\ &= \underbrace{e^{x_0}}_{f(x_0)} + \underbrace{e^{x_0}}_{\text{il coeff. di } h \text{ è } f'(x_0)} h + o(h) \end{aligned}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ (risulterà $f'(x) = \cos x$)

$$1^{\circ} \text{ modo: } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

(2 possibili strade: usare formula per $\sin \alpha - \sin \beta$, oppure usare formula per $\sin(\alpha+\beta)$: uso questa!)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $-\frac{1}{2}$ 0 1

$$2^{\circ} \text{ modo: } f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$$

$$= \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h \quad (\text{uso sviluppi})$$

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 \cdot (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + \sin x_0 \cdot o(h) + \cos x_0 \cdot h + \cos x_0 \cdot o(h)$$

$$= \sin x_0 + \cos x_0 \cdot h + o(h)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f(x_0)$ $\text{il coeff. di } h \text{ è } f'(x_0).$

Esercizio Fare nei due modi la derivata di $f(x) = \cos x$ (viene $f'(x) = -\sin x$)

Esempio 4 $f(x) = \log x$ (non viene $f'(x) = \frac{1}{x}$) (si intende $x > 0$)

$$1^{\circ} \text{ modo: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} = \frac{1}{x_0}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 (pongo $y = \frac{h}{x_0}$)

$$2^{\circ} \text{ modo: } f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right] = \log x_0 + \log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)$$

$$= \log x_0 + \frac{h}{x_0} + o(h)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f(x_0)$ $\text{il coeff. è } f'(x_0).$

Regole di derivazione Detto brutalmente

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ costante})$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tabellina di derivate delle funzioni elementari

$$(\text{costante})' = 0$$

$$[x^k]' = k x^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

— o — o —

Derivata della somma Pongo $\varphi(x) = f(x) + g(x)$

$$1^\circ \text{ modo: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$2^\circ \text{ modo: per ipotesi } f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

Sommando:

$$\varphi(x_0+h) = \underbrace{[f(x_0) + g(x_0)]}_{\varphi(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)] \cdot h}_{\varphi'(x_0) \cdot h} + o(h)$$

Derivata del prodotto Pongo $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 1^o \text{ modo: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0+h) \cdot g(x_0) + f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{f(x_0+h)}_{f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \right] \\
 &= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^o \text{ modo: ipotesi } f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) \\
 g(x_0+h) &= g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_0+h) &= f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) = (\text{devo moltiplicare le 2 righe}) \\
 &= \boxed{f(x_0) \cdot g(x_0)} + f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot h + f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h + o(h) \\
 &= \varphi(x_0) + \underbrace{[f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)] \cdot h}_{\text{il coeff. è } \varphi'(x_0)} + o(h)
 \end{aligned}$$

mangia i termini
con $o(h)$, h^2 , $h \cdot o(h)$,
 $o(h) \cdot o(h)$

Derivata di $\frac{1}{f}$ Pongo $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}}_{\frac{1}{[f(x_0)]^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{g}{f}\right)' &= \left[g \cdot \frac{1}{f}\right]' = g' \cdot \frac{1}{f} + g \cdot \left[\frac{1}{f}\right]' \\
 &= g' \cdot \frac{1}{f} + g \cdot \left(-\frac{f'}{f^2}\right) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2}
 \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 030

Titolo nota

15/10/2011

Derivata della funzione inversa

Sia $f(x)$ una funzione e sia $g(x)$ la sua inversa. Questo vuol dire che

$$f(g(x)) = x \quad \forall x \in \text{insieme di definizione di } g.$$

Supponiamo di poter derivare a dx e dx . Otteniamo

$$[f(g(x))]' = [x]' \quad ; \quad f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

Supponiamo anche di poter dividere. Troviamo

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Derivata
funzione inversa

Esempio 1 $f(x) = e^x$ $g(x) = \log x$ Allora $f'(x) = e^x$

$$[\log x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $f(x) = \tan x$ $g(x) = \arctan x$. Calcolo $f'(x)$

$$[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{[\sin x]' \cdot \cos x - [\cos x]' \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

↑
regola quoziente

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$[\arctan x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $g(x) = \arcsin x$ $f'(x) = \cos x$

$$[\arcsin x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin x}_\alpha)}$$

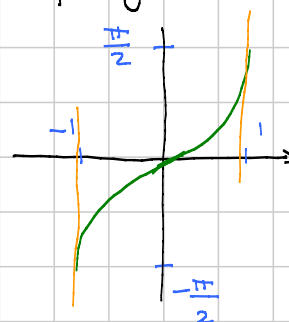
Ora $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, quindi

$$\frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Achtung! La formula $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ non vale per ogni α (ci vorrebbe un $+$ o un $-$). Vale con il segno $+$ quando α sta nel I e IV quadrante. Io uso la formula con $\alpha = \arcsin x$ e fortunatamente $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, quindi nei quadranti giusti.

Oss. La funzione $\arcsin x$ è definita e continua per ogni $x \in [-1, 1]$. Tuttavia è derivabile solo per $x \in (-1, 1)$.

In $x = \pm 1$ la tangente al grafico "ha coeff. angolare $+\infty$ ", quindi è verticale



Esercizio Fare le stesse considerazioni per ricavare la derivata di $\arccos x$.

Derivate di x^k con k intero. Per $k = 0, 1, 2$ si fa facilmente con la definizione (1° o 2° modo). Poi si procede per induzione.

Dim. Passo base $k = 2$ già fatto.

$k \Rightarrow k+1$ Ipotesi: $[x^k]' = k \cdot x^{k-1}$

tesi: $[x^{k+1}]' = (k+1) \cdot x^k$

Dim. P.I.: $[x^{k+1}]' = [x \cdot x^k]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} [x]' \cdot x^k + x \cdot [x^k]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriv. prodotto}}}{=} 1 \cdot x^k + x \cdot [x^k]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ipotesi}}}{=} 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (k+1) \cdot x^k$

Derivata di x^α con $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [e^{\alpha \log x}]' = e^{\alpha \log x} \cdot [\alpha \log x]' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} \\ &= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Derivata funzione composta Pongo $\varphi(x) = f(g(x))$

Ipotesi: g derivabile in x_0 : $g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \rightarrow 0$
 f derivabile in $g(x_0)$: $f(g(x_0)+k) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot k + o(k)$ per $k \rightarrow 0$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi(x_0+h) &= f(g(x_0+h)) \\ &= f(g(x_0) + \underbrace{g'(x_0) \cdot h + o(h)}_k) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot \underbrace{[g'(x_0)h + o(h)]}_k + o(\underbrace{g'(x_0) \cdot h + o(h)}_k) \\ &= \underbrace{f(g(x_0))}_{\varphi(x_0)} + \underbrace{f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \cdot h}_{\varphi'(x_0)} + o(h) \end{aligned}$$

$\cancel{f'(g(x_0)) \cdot o(h)}$
 $o(g'(x_0) \cdot h) + o(o(h))$

Esercizio 1

$f(x) = x^2 \cos x$ PRODOTTO

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2]' \cdot \cos x + x^2 \cdot [\cos x]' \\ &= 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x \end{aligned}$$

Esercizio 2

$f(x) = \cos(x^3)$ COMPOSIZIONE con funzione esterna $\cos x$ e interna x^3

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x^3 \cdot 3x^2 \\ &= -3x^2 \cdot \sin x^3 \end{aligned}$$

Esercizio 3

$f(x) = \cos^3 x$ COMPOSIZIONE con funzione esterna x^3 e interna $\cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) \\ &= -3\cos^2 x \cdot \sin x \end{aligned}$$

Esercizio 4

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(e^x)}$$

$$f'(x) = - \frac{[\sin^2(e^x)]'}{\sin^4(e^x)} = - \frac{2 \sin e^x \cdot \cos e^x \cdot e^x}{\sin^4(e^x)}$$

$$= - \frac{2 e^x \cdot \cos e^x}{\sin^3 e^x}$$

Alternativa: $f(x) = \sin^{-2}(e^x)$

$$f'(x) = -2 \cdot \sin^{-3}(e^x) \cdot \cos(e^x) \cdot e^x$$

Esercizio 5

$$f(x) = (\arctan x)^{\sin x} \quad \dots \quad \text{più semplice } f(x) = x^x$$

Possibilità 1: visto come x^x viene $x \cdot x^{x-1}$ Possibilità 2: visto come a^x viene $x^x \cdot \log x$

Stagiate tutte e 2,
perché valgono solo
quando x è costante

Possibilità corretta: $x^x = e^{x \log x}$, quindi

$$[x^x]' = [e^{x \log x}]' = e^{x \log x} \cdot [x \log x]' = e^{x \log x} [\log x + x \cdot \frac{1}{x}]$$

$$= x^x [\log x + 1]$$

Allo stesso modo:

$$[(\arctan x)^{\sin x}]' = [e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)}]'$$

$$= e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)} \cdot \{ \cos x \cdot \log(\arctan x) + \sin x \cdot [\log(\arctan x)]' \}$$

$$= (\arctan x)^{\sin x} \left\{ \cos x \cdot \log(\arctan x) + \sin x \cdot \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right\}$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 031

Titolo nota

19/10/2011

Teorema di De L'Hôpital Consideriamo un limite del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad x_0 \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Supponiamo 3 set di ipotesi:

(i) ipotesi burocratiche (esistenza di f', g' , denominatori $\neq 0, \dots$)(ii) il limite in questione sia del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad (\text{stesso } l).$$

Utilizzo operativo1 - Devo fare il limite del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ 2 - Se è $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ posso provare ad applicare Hôp. (se non è così, bastano i trucchi algebrici)3 - Provo quindi a calcolare il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ci sono vari casi

3.1 - Se questo esiste ed è un certo $l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora so fare il limite originario

3.2 - Se questo non esiste, allora BOH (cioè non si può dire nulla su quello originario)

3.3 - Se questo è ancora una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, posso reiterare e provare a calcolare il limite di $\frac{f''(x)}{g''(x)}$, e così via con le derivate successive.Achtung! Hôp non dice nulla

- se la forma non è $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- se il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$
 (Note: $\uparrow$ Hôp, $\uparrow$ corretto dopo video)

No! Non è una forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite viene $+\infty$!!!

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x}$ Controllo numeratore e denom.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin x = +\infty$ ($2x + \sin x \geq 2x - 1$)
 (Note: $\downarrow +\infty$, $\downarrow +\infty$)

Essendo una forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ posso applicare Hôp.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x} \stackrel{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{1} = \text{N.E.}$

No!! L'uguaglianza vale solo se il secondo limite esiste in $\overline{\mathbb{R}}$.
 Il limite originario in realtà esiste e vale 2:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$ $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$
 (Note: $\downarrow 0$)

Esercizio Ha senso calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ con Hôp.?

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$

1° modo: percorso + limiti notevoli

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) + x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

2° modo: equivalenze asintotiche: $\sin x \sim x$

$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \sim \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^5}{x^3} = x^2 \rightarrow 0$

3° modo: Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 5x^4}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 20x^3}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 60x^2}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$\uparrow$ $[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]$ $\uparrow$ $[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]$ $\uparrow$ $[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]$

Achtung! Il risultato corretto è il 3° modo.

- Nel 1° modo abbiamo fatto il limite una volta per volta: VIETATISSIMO
- Nel 2° modo emergono tutti i pericoli dell'equivalenza asintotica.

Con o piccolo non sarebbe successo:

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} - (\cancel{x} + o(x)) + \boxed{x^5}}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$$

— o — o —

L'utilità di Hôp. per il calcolo dei limiti è circa del 3%. Il motivo è che derivando spesso le funzioni peggiorano...

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3 + \sqrt{\arctan^7 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3 + o(x^3)}$

$\sim x^{7/2}$ $\downarrow \frac{1}{6}$ $\downarrow 1$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \quad [= +\infty \cdot 0]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

$\uparrow$ $[\frac{0}{0}: \text{Hôp}]$ — o — o —

Si può usare Hôpital per fare limiti di successioni? Sì, ma solo all'interno del criterio funzioni $\rightarrow$ successioni

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1.$

$\uparrow$ $\text{Pongo } x = n$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \left[\frac{0}{0} \right]$ Num e den. hanno senso per $x \rightarrow 1^-$

H₃P
 $\downarrow$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{+\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} (-1)}$ $= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}$ [è ancora indeterminata $\frac{0}{0}$]
 derivata di $-x$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \sqrt{\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

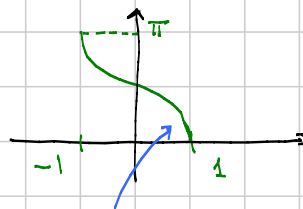
Oss. Ponendo $1-x = y$ abbiamo che $y \rightarrow 0^+$ ed il limite diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-y)}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}$$

che detto altrimenti si può scrivere come

$$\arccos(1-y) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{y} + o(\sqrt{y}) \quad \text{per } y \rightarrow 0^+$$

(basta applicare la definizione di o piccolo "dividendo")



questo tratto è una specie di radice.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 032

Titolo nota

19/10/2011

FUNZIONI IPERBOLICHE

sinh x

cosh x

tanh x

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Simmetrie $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ PARI

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$
 DISPARI

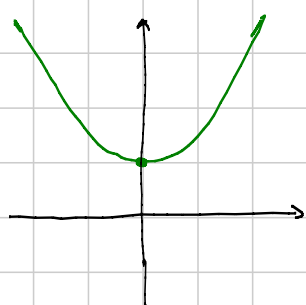
$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$$
 DISPARI

In $x=0$ $\cosh 0 = 1$ $\sinh 0 = \tanh 0 = 0$

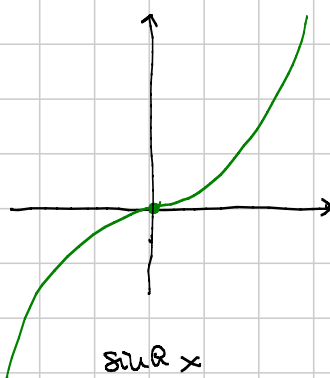
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty \text{ (è pari...)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \text{ (è dispari)}$$

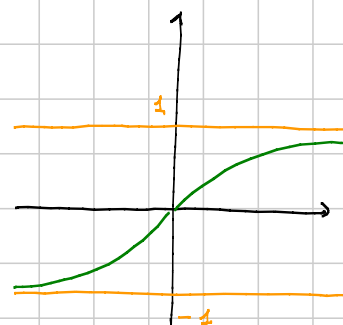
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$



cosh x



sinh x



tanh x

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

$$\sinh x \cdot \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2 \cdot 2}$$

Quindi $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x$ (analogamente alla trigonometria)

Esercizio Trovare formule per $\cosh(2x)$ (ci sono seguiti diversi rispedi alla trigonometria normale)

Formula fondamentale

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Quindi $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Derivate : $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (\text{uso relas. fond.})$$

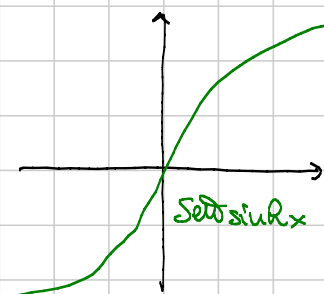
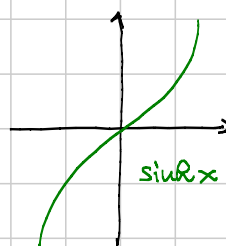
$$= 1 - \tanh^2 x$$

Funzioni inverse $\sinh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
è iniettiva, surgettiva, e
strettamente crescente.

Quindi ammette una funzione inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
che è $g(x) = \text{Sett} \sinh x$

$\uparrow$
sette

Si tratta di una funzione dispari e
strettamente crescente.

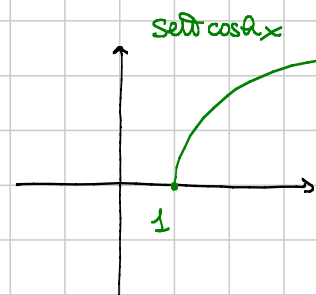
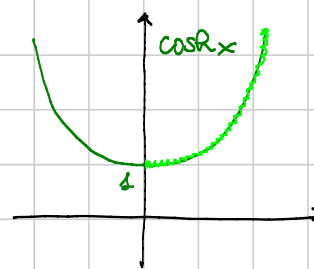


$\cosh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né iniettiva, né surgettiva.

Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è invertibile, dunque ha un' inversa

$$g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

che è $g(x) = \operatorname{sech} x$.



Quindi: $\operatorname{sech} x$ prende in input valore reali qualunque e restituisce reali con lo stesso segno

$\cosh x$ prende in input valori reali ≥ 1 e restituisce reali ≥ 0

Analogamente si ottiene $\operatorname{sech} x$, che è una $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ (disegnare il grafico!).

Esercizio Trovare la formula per $\operatorname{sech} y$.

Questo vuol dire risolvere l'equazione $\cosh x = y$, cioè

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y; \quad e^x + e^{-x} = 2y$$

Pongo $z = e^x$. Diventa $z + \frac{1}{z} = 2y$, cioè $z^2 + 1 = 2yz$, cioè $z^2 - 2yz + 1 = 0$, da cui

$$z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Questo ha senso per $y \geq 1$, che sono i valori per cui vado a definire $\operatorname{sech} y$

Tornando in x ottengo

$$x = \log z = \log (y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Osservazione: è giusto che dato $y > 1$ esistano 2 valori di x (la funzione è pari). Quello che interessa è quello con il $+$. Quindi

$$\operatorname{sech} y = \log (y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Esercizio Trovare formule analoghe per $\text{Settsin} y$ e $\text{Sett} \tan y$.

Esercizio Trovare analoghi dei limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
Trovare anche gli sviluppi di $\sinh x$ e $\cosh x$.

Significato geometrico Trigonometria usuale:

prendo $x^2 + y^2 = 1$, prendo un p.to P che corrisponde ad un arco lungo α , e allora
 $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

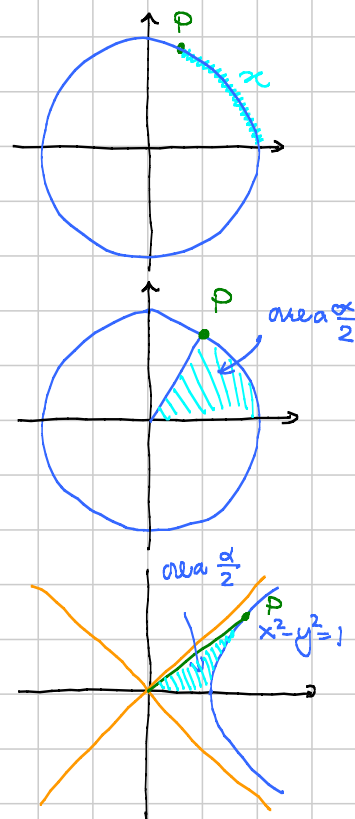
Variante: prendo $x^2 + y^2 = 1$, prendo P in modo che l'area del settore sia $\frac{\alpha}{2}$.

Allora

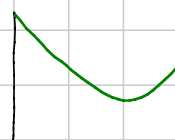
$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Versione iperbolica: prendo $x^2 - y^2 = 1$ e prendo P in modo che l'area del settore sia $\frac{\alpha}{2}$. Allora

$$P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$



Oss. fisica Un filo tra 2 pali è un $\cosh$



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 033

Titolo nota

20/10/2011

FORMULA DI TAYLOR Caso con centro in $x_0 = 0$.

Sia $f(x)$ una funzione, e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$, dipendente da n e dalla funzione, tale che $\text{grado}(P_n(x)) \leq n$ e vale

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

Oss. Le ipotesi sotto cui vale la formula sono l'esistenza delle derivate di $f(x)$ fino all'ordine n (le derivate fino alla $(n-1)$ -esima devono esistere in un intorno di $x_0 = 0$, la derivata n -esima basta che esista nel solo pto $x_0 = 0$).

Brutalmente: scrivere $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ vuol dire che posso sostituire $f(x)$ con un polinomio commettendo un errore che è $o(x^n)$.

Terminologia. Questo si chiama formula di Taylor con resto di PEANO, cioè scritto come o piccolo.

Oss. Gli sviluppi sono formule di Taylor con $n=1$, tranne $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ che ha $n=2$.

"Dim" nel caso speciale $n=3$ Devo dimostrare che

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3}_{P_3(x)} + o(x^3)$$

Per farlo porto il $P_3(x)$ a sx, divido per x^3 , e spero che il limite sia 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_3(x)}{x^3} = \left[\frac{f(0) - f(0)}{0} = \frac{0}{0} : \text{H\acute{o}p} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - P_3'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{f'''(0)}{2}x^2}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} : \text{H\acute{o}p} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{6x} \left[= \frac{f''(0) - f''(0)}{0} = \frac{0}{0} : \text{H\acute{o}p} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = f'''(0) - f'''(0) = 0 \text{ come volevamo.}$$

La situazione è del tutto analoga se invece di 3 abbiamo un qualunque n : serviremo n applicazioni di De L'Hopital.

Tabellina degli sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \quad \sin R x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad \cos R x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots$$

α reale qualunque $\binom{\alpha}{2}$ $\binom{\alpha}{3}$ $\binom{\alpha}{4}$

Oss.1 le funzioni dispari hanno solo potenze dispari nello sviluppo
 " pari " " " pari " " "

Oss.2 Casi particolari dell'ultimo sviluppo.

$\alpha = -1$ ottengo

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + \dots$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Oss.3 Voglio sviluppare $\sin x$ con $n=4$. Ottengo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad \text{sviluppo con } n=4$$

$P_4(x)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{sviluppo con } n=3$$

$P_3(x)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^2)$$

$P_2(x)$

È una formula corretta, ma in realtà inutile in quanto $o(x^2)$ ingloba $\frac{x^3}{3!}$

sviluppo di Taylor di $\sin x$ con $n=2$.

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$. Utilizzo gli sviluppi di Taylor con $n=3$ (deciso dal denominatore)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (\text{da tabellina}). \text{ Sostituisco:}$$

$$\begin{aligned} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} &= \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \cancel{x^5}}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \\ &= \frac{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{\cancel{x^3}} \right)}{\cancel{x^3}} \rightarrow \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Cosa succede se sbaglio ordine.

Ordine troppo basso: $n = 2$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + o(x^2) + \boxed{x^5}}{x^3} = \frac{o(x^2)}{x^3} = \frac{o(x^2)}{o(x^2)} = \text{Boh.}$$

Ordine troppo alto: $n = 5$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\begin{aligned} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} &= \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + x^5 + o(x^5)}{x^3} \\ &= \frac{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + x^2 + \frac{o(x^5)}{x^3} \right)}{\cancel{x^3}} \rightarrow \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Un po' di conti inutili.

Oss. brutale

Un limite si può fare con i limiti notevoli se e solo se bastano gli sviluppi di ordine 1.

Se lo scontro finale è tra potenze x^k , allora con l'Hôpital servirebbero k passaggi.

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 034

Titolo nota

20/10/2011

Formula per i polinomi di Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Caso $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(k)}(x) = e^x$$

Quindi $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

Quindi il coeff. di x^k nello sviluppo di e^x è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

Caso $f(x) = \sin x$

$$f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$

$$\vdots$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

$$\dots f^{(2011)}(x) = -\cos x$$

Sostituendo $x=0$ troviamo

$$f^{(0)}(0) = 0, f^{(1)}(0) = 1, f^{(2)}(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, \text{ e così via ciclicam.}$$

Quindi abbiamo 0 per k pari e ± 1 alternati per k dispari, quindi i coeff. nei polinomi di Taylor sono 0 per le potenze pari e $\frac{\pm 1}{k!}$ per le potenze dispari:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Caso $f(x) = \cos x$

Le derivate si ripetono ancora con periodo 4, traslate di uno rispetto al caso precedente.

Quindi $f^{(0)}(0), f^{(1)}(0), \dots$ viene 0 sui dispari, e ± 1 alternati sui pari.

Caso $f(x) = \sinh x$ $f^{(0)}(x) = \sinh x = f^{(\text{pari})}(x)$
 $f^{(1)}(x) = \cosh x = f^{(\text{dispari})}(x)$

Quando sostituisco $x=0$ ottengo alternativamente 0 e 1, sempre con il segno +.

Per $\cosh x$ è la stessa cosa.

Oss. Lo sviluppo di $\sinh x$ prende tutti i termini dispari di quello di e^x
 " " " $\cosh x$ " " " pari " " " ".

Quindi, almeno formalmente, $\sinh x + \cosh x = e^x$. D'altra parte

$$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

Caso $f(x) = \log(1+x)$ Mi serve una formula per $f^{(k)}(0)$, quindi sarebbe utile una formula per $f^{(k)}(x)$.

Esperimenti: $f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$, $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$f^{(3)}(x) = [- (1+x)^{-2}]' = -(-2)(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = [2(1+x)^{-3}]' = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Congettura:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Dim per induzione Passo base: $k=1$ banale sostituzione

Passo induttivo: Ipotesi: la formula vale per un certo k

Tesi: vale per il k successivo ($k+1$)

$$\text{Dim.: } f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = \left[(-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \right]'$$

↑
uso Hp

Calcolo la
derivata

$$\rightarrow = (-1)^{k+1} (k-1)! [(1+x)^{-k}]'$$

$$= (-1)^{k+1} (k-1)! (-k) (1+x)^{-k-1}$$

$$= (-1)^{k+2} k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \quad \text{che è quanto volevo}$$

In conclusione il coeff. di x^k nello sviluppo di $\log(1+x)$ è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

↑
metto $x=0$ nella
formula per $f^{(k)}(x)$

Quindi resta $\frac{1}{k}$ con segni alternati
+ sui dispari e - sui pari

Esercizio: dimostrare lo sviluppo di $(1+x)^a$, trovando la formula
per $f^{(k)}(x)$.
— o — o —

Noti gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari, si ottengono
gli sviluppi di funzioni ottenute mediante operazioni algebriche e/o
composizioni bypassando il calcolo di derivate.

Somma e differenza Se $f(x) = P_m(x) + o(x^n)$ e $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$
allora

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$

quindi basta sommare / sottrarre i polinomi di Taylor.

Dim. Sommare le due scritte e usare che $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

Prodotto Siano f e g come sopra. Allora

$$f(x) \cdot g(x) = P_m(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \text{Dim.: } f(x) \cdot g(x) &= \{P_m(x) + o(x^n)\} \cdot \{Q_n(x) + o(x^n)\} \\ &= \{P_m(x) + x^n \omega_1(x)\} \cdot \{Q_n(x) + x^n \omega_2(x)\} \\ &= P_m(x) \cdot Q_n(x) + P_m(x) \cdot x^n \cdot \omega_2(x) + \\ &\quad + Q_n(x) \cdot x^n \omega_1(x) + x^{2n} \omega_1(x) \cdot \omega_2(x) \\ &= P_m(x) \cdot Q_n(x) + x^n \underbrace{\{P_m(x) \cdot \omega_2(x) + Q_n(x) \cdot \omega_1(x) + x^n \omega_1(x) \cdot \omega_2(x)\}}_{\omega_3(x) \rightarrow 0+0+0=0} \\ &= P_m(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo del prodotto si ottiene moltiplicando gli sviluppi. Nel moltiplicare i polinomi posso ignorare tutti i termini di grado $> n$ (vengono mangiati da $O(x^n)$).

Esempio 1

$$\cos x + 2 \sin x \quad n = 4$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24} x^4 + O(x^4)$$

($\cos x$ con $n=4$)

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^4)$$

($\sin x$ con $n=4$)

$$\cos x + 2 \sin x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 2x - \frac{1}{3} x^3 + O(x^4)$$

$$= 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + O(x^4)$$

Esempio 2

$$\arctan x \cdot \sin x \quad n = 5$$

$$\arctan x \cdot \sin x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^5) \right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^5) \right)$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{3} + O(x^5)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^5)$$

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 035

Titolo nota

21/10/2011

Formula di Taylor (McLaurin) con resto di PEANO

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

Polinomio di Taylor di somma, differenza, prodotto si ottengono facendo la stessa operazione sui polinomi.

Esempio 1 $f(x) = \cos x \cdot e^x + \sin x$ $n=4$

$$= \left\{ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right\} \left\{ 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right\} + \left\{ x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \right\}$$

$\cos x$ e^x $\sin x$

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1-3}{12}$$

$$= \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{24}x^4 - \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + \cancel{x} - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o(x^4)$$

$$= 1 + 2x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

Domanda: quanto vale $f'''(0)$? Quanto vale $f^{(4)}(0)$?

Il coeff. di x^3 nel polinomio di Taylor è $\frac{f'''(0)}{6}$. Nel nostro caso vale $-\frac{1}{2}$.

Quindi

$$\frac{f'''(0)}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f'''(0) = -3$$

Allo stesso modo

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{6} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -\frac{1}{6} \cdot 24 = -4$$

Polinomi di Taylor della composizione

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \quad n=5$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o((2x)^5)$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{32}{120}x^5 + o(32x^5) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

(cambio x con $-x$: nei gradi pari non succede nulla, nei dispari cambio il segno)

Sommando e dividendo per 2 otteengo...

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \log(1-2x) &= (-2x) - \frac{1}{2}(-2x)^2 + \frac{1}{3}(-2x)^3 - \frac{1}{4}(-2x)^4 + o((-2x)^4) \\ &= -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Si può vedere in 2 modi: metto $-2x$ al posto di x in $\log(1+x)$
metto $2x$ al posto di x in $\log(1-x)$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$\sin x^4 = x^4 - \frac{1}{6}x^{12} + \frac{1}{120}x^{20} + o(x^{20})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5 \omega(x); \quad \sin x^4 = x^4 - \frac{1}{6}x^{12} + \frac{1}{120}x^{20} + x^{20} \omega(x^4)$$

$\omega(x) \rightarrow 0$
 $\omega(x^4) \rightarrow 0$

È anche vero che $\sin x^4 = x^4 - \frac{1}{6}x^{12} + \frac{1}{120}x^{20} + o(x^{27})$ è corretta
↓ il termine successivo sarebbe in x^{28}

$$\arctan(x^3) = x^3 - \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{5}x^{15} + o(x^{15}) \text{ e volendo } o(x^{20})$$

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$$

$e^{\sin x}$ sviluppo con $n=3$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \quad \text{Al posto di } t \text{ metto } \sin x$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3)$$

Al posto di qui $\sin x$ sostituisco il suo sviluppo di ordine 3:

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}_{\text{resta solo } x^2} + \frac{1}{6}(\dots)^3 + o((\dots)^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o(x^3) + o((\sin x)^3)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

È vero che $o((\sin x)^3) = o(x^3)$? Sì, e si verifica in tanti modi

1° modo: $o((\sin x)^3) = (\sin x)^3 \cdot w(x)$

$$= x^3 \cdot \underbrace{\frac{(\sin x)^3}{x^3} \cdot w(x)}_{w_1(x) \rightarrow 0}$$

2° modo: $(\sin x)^3 = x^3 + o(x^3)$, quindi $o((\sin x)^3) = o(x^3 + o(x^3))$

$$= o(x^3) + o(o(x^3))$$

$$= o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$$

Brutalmente! $\sin x$ e x sono forti uguali, quindi

$(\sin x)^3$ e x^3 " " " , quindi

chi batte $(\sin x)^3$ batte x^3 e viceversa.

Altro esempio

$\cos(\arctan x)$

$n = 4$

$\cos t = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + o(t^4)$

Pongo $t = \arctan x$

$\cos(\arctan x) = 1 - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \frac{1}{24} (\arctan x)^4 + o((\arctan x)^4)$

Sostituisco qui $\arctan x$ con il suo sviluppo di ordine 4:

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{24} (\dots)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{2}{3} x^4 \right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

↑
doppio prodotto
 $2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{3} x^3\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + o(x^5)$$

perché $\cos(\arctan x)$ è pari
e quindi il coeff. di x^5 è di
segno 0.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 036

Titolo nota

21/10/2011

Esempio $f(x) = \arctan(\cos x)$ $n=4$

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^4) \quad \text{Pongo } t = \cos x$$

$$\arctan(\cos x) = \cos x - \frac{1}{3}(\cos x)^3 + o((\cos x)^4)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{3}(\quad)^3 + o(\underbrace{(\cos x)^4}_{o(x^4)})$$

È vero che $o((\cos x)^4) = o(x^4)$. **NO!!!!**

Brutalmente: non è vero che $(\cos x) \sim x$, quindi $(\cos x)^4 \sim x^4$. Questo andava bene quando al posto di $\cos x$ c'erano $\sin x$ o $\arctan x$...

Lo sviluppo di $\arctan(\cos x)$ NON si può fare componendo gli sviluppi perché $\cos x \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$, mentre gli sviluppi vanno bene quando gli argomenti tendono a 0.

$$\begin{array}{ll} \cos(\arctan x) & \text{OK} \\ e^{\sin x} & \text{OK} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \arctan(\cos x) & \text{NO} \\ \sin(e^x) & \text{NO} \end{array}$$

non tende a 0 per $x \rightarrow 0$
 $\uparrow$ e^x tende a 1.

$$\sin(e^x - 1) \quad \text{OK perché } e^x - 1 \text{ tende a 0.}$$

$$\sin(e^x - 1) \quad \text{con } n=4$$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \quad \text{Pongo } t = e^x - 1 \quad (\text{osservo che } t \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} \sin(e^x - 1) &= (e^x - 1) - \frac{1}{6}(e^x - 1)^3 + o((e^x - 1)^4) \\ &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^3 + o(x^4) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^4\right) + o(x^4) \end{aligned}$$

OK perché $(e^x - 1)^4 \sim x^4$

Parentesi: $(Mostro)^2 =$ somma dei quadrati + tutti i doppi prodotti
 $(Mostro)^3 \rightarrow$ supercanto $Mostro^2 \cdot Mostro$
 $\rightarrow$ somma di tutti i cubi +
 + somma di tutti i $3a^2b$ (compresi $3ab^2$)
 + somma di tutti i $6abc$ (scegliendo in tutti i modi possibili abc)
 $(Mostro)^4 = (Mostro)^2 \cdot (Mostro)^2$

$$(e^x - 1)^3 = \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^3$$

$$= x^3 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\uparrow 3 \cdot (x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

Esempio 2 $f(x) = \sin^2 x \cdot \arctan x$ sviluppo con $n=4$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$\uparrow$ doppio prodotto

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) = x^3 + o(x^4)$$

Più astuto: $\sin x = x + o(x^2) \Rightarrow \sin^2 x = x^2 + o(x^3)$

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= x^2 + 2x \cdot o(x^2) + [o(x^2)]^2 \\ &= x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\arctan x = x + o(x^2)$$

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \arctan x &= (x^2 + o(x^3))(x + o(x^2)) \\ &= x^3 + x^2 \cdot o(x^2) + x \cdot o(x^3) + o(x^3) \cdot o(x^2) \\ &= x^3 + o(x^4) + o(x^4) + o(x^5)\end{aligned}$$

Achtung! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+x^3) - \arctan x}{\log(1+2\sin^3 x)} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

Giocamosi sull'ordine 3, faccio gli sviluppi con $n=3$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{Pongo } t = 2\sin^3 x$$

$$\begin{aligned} \log(1+2\sin^3 x) &= 2\sin^3 x + o(2\sin^3 x) \\ &= 2x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\sin(x+x^3) = x+x^3 + o(x^3) \quad \text{NO!!!!!!}$$

$$\sin t = t + o(t) \quad \text{Pongo } t = x+x^3 \text{ diventa}$$

$$\sin(x+x^3) = (x+x^3) + o(x+x^3)$$

$o(x)$ è basta $= x + o(x)$ così ho $n=1$

N.B. $o(x+x^3) = (x+x^3)\omega(x) = \otimes (1+x^2)\omega(x)$

$$\text{Corretto: } \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$$

$$\begin{aligned} \sin(x+x^3) &= (x+x^3) - \frac{1}{6}(x+x^3)^3 + o((x+x^3)^3) \\ &= x+x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Finale: } \text{Frazione} &= \frac{\cancel{x} + x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{\frac{2}{6}x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} = \text{raccolgo } x^3 \dots = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{\arctan^2 x}}$ Faccio e-alla e mi riduco all'esponente

$$\frac{1}{\arctan^2 x} \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \text{ quindi } \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

Nota bene: $\frac{o(x^3)}{x} = o(x^2) \quad \frac{x^3 \omega(x)}{x} = x^2 \omega(x)$

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)$$

Uso $\log(1+t) = t + o(t)$ con $t = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$. Ottengo

$$\log\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) + o\left(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

Quindi
$$\frac{1}{\arctan^2 x} \cdot \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \rightarrow -\frac{1}{6}$$

Si può fare approccio misto

$\frac{x^2}{\arctan^2 x}$	$\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
$\downarrow$ limite notevole 1	$\downarrow$ $-\frac{1}{6}$ Taylor come sopra

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 037

Titolo nota

21/10/2011

Sviluppi di Taylor con centro x_0 qualunque

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

↑
per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Si ricava dall'altra ponendo $R = x - x_0$ e $g(R) = f(x_0 + R)$.

Quando $x \rightarrow x_0$, lo che $R \rightarrow 0$, quindi posso scrivere

$$g(R) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} R^k + o(R^n) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Taylor per $g(R)$ con centro in $R=0$

Osservo che $g(R) = f(x_0 + R) = f(x)$ e che $g^{(k)}(R) = f^{(k)}(x_0 + R)$, quindi $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$. Sostituendo $g(R)$, R , e le derivate di g ottengo la formula per f .

Altro modo di scrivere la stessa cosa

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k + o(R^n) \quad \text{per } R \rightarrow 0 \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} R + \frac{f''(x_0)}{2!} R^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n + o(R^n) \end{aligned}$$

Esempio 1 $f(x) = \arctan x$ $x_0 = 1$ $n = 3$ Bisogna calcolare le derivate !

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = -2 \frac{(1+x^2)^2 - 2(1+x^2) \cdot 2x \cdot x}{(1+x^2)^4}$$

$$\text{Quindi } f'''(x) = -2 \frac{(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^3} = -2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

Calcolo le derivate in $x_0 = 1$: $f(x_0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{2}$,
 $f''(x_0) = -\frac{1}{2}$, $f'''(x_0) = -2 \frac{-2}{8} = \frac{1}{2}$. Quindi

$$f(x_0+R) = f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{1}{2}f''(x_0)R^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)R^3 + o(R^3)$$

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}R^3 + o(R^3)$$

sviluppo di arctan
centrato in $x_0=1$
e ordine 3

Esempio 2 $f(x) = \sin x$ $x_0 = 1$ $n = 3$

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x$$

Calcolo in $x_0 = 1$: $f(x_0) = \sin 1$, $f'(x_0) = \cos 1$, $f''(x_0) = -\sin 1$
 $f'''(x_0) = -\cos 1$. Quindi

$$\sin(1+R) = \sin 1 + \cos 1 \cdot R - \frac{1}{2}\sin 1 R^2 - \frac{1}{6}\cos 1 R^3 + o(R^3) \text{ per } R \rightarrow 0$$

Si poteva giungere allo stesso risultato usando le formule di addizione:

$$\sin(1+R) = \sin 1 \cdot \cos R + \cos 1 \cdot \sin R \quad \text{ora posso usare gli sviluppi per } \sin R \text{ e } \cos R$$

$$= \sin 1 \cdot \left(1 - \frac{R^2}{2} + o(R^3)\right) + \cos 1 \cdot \left(R - \frac{1}{6}R^3 + o(R^3)\right)$$

Esempio 3 Voglio sviluppare $\arctan(\cos x)$ con centro in 0 e $n = 4$

Non posso farlo utilizzando lo sviluppo di arctan in 0, perché $\cos x \rightarrow 1$.
Dovrò usare lo sviluppo di arctan in 1.

$$\arctan(\cos x) = \arctan\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) \quad \text{lo penso come}$$

$$\arctan(1+R) \text{ con } R = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

(osservo che $R \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$)

$$\text{So da prima che } \arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + o(R^2)$$

Sostituendo trovo:

$$\arctan(\cos x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right\} - \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right\}^2 + o(R^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

in R posso racc. x^2 ,
quindi in R^2 posso
racc. x^4

Esempio 4 Taylor con limiti di successioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right) \quad [= +\infty \cdot (0-0)]$$

Oss.: gli argomenti di $\sin$ e $\arctan$ tendono a 0, quindi dove si può applicare Taylor.

Safe mode $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3}$

$x = \frac{1}{n}$
quando $n \rightarrow +\infty$
ho che $x \rightarrow 0$

Taylor con $n=3$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Expert mode $n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right) = n^3 \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$

$$= n^3 \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = \frac{1}{6} + n^3 \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} \rightarrow 0$$

$$o(1) \rightarrow 0$$

sarebbe il solo 0

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan n - \sinh n}{n^3} = -\infty$

expert mode: $\frac{\arctan n - \sinh n}{n^3} = \frac{\cancel{n} - \frac{1}{3}n^3 - \cancel{n} - \frac{1}{6}n^3 + o(n^3)}{n^3} \rightarrow \frac{1}{2}$

NO !!!!!!! Gli argomenti di $\sinh$ e $\arctan$ non tendono a 0 !!!

$$\left[= \frac{+\infty}{+\infty} \right]$$

$$= \frac{\arctan n}{n^3} - \frac{\sinh n}{n^3}$$

esponenziale contro potenza

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 038

Titolo nota

22/10/2011

SERIE Sia a_n una successione. Una serie è una scrittura del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=122}^{\infty} a_n$$

Brutalmente: serie = somma degli infiniti termini della successione.

Problema: cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Somme parziali Data la succ. a_n , costruisco una nuova succ. s_n così definita:

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

In formule

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (\text{N.B.: questa è una sommatoria di un numero finito di numeri})$$

La serie si definisce come il limite delle somme parziali per $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

Come tutti i limiti, una serie ha 4 possibilità

- essere un numero $l \in \mathbb{R}$ (la serie converge ad l)
- essere $+\infty$ (la serie diverge a $+\infty$)
- " $-\infty$ " " " " " $-\infty$
- non esistere (la serie è indeterminata)

Esempio banale 1 $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo caso

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0 \rightarrow 0 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Esempio banale 2 $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $s_n = n+1$ (c'è anche a_0)

$$s_n \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

Esempio banale 3 $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$s_0 = a_0 = 1, \quad s_1 = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

Quindi $s_n = 1$ per n pari e $s_n = 0$ per n dispari, quindi s_n non ha limite, dunque la serie è indeterminata.

Oss. Se ho $\sum_{n=22}^{\infty} a_n$, ovviamente costruisco le somme parziali a partire da a_{22} :

$$s_{22} = a_{22}, \quad s_{23} = a_{22} + a_{23}, \quad s_{24} = a_{22} + a_{23} + a_{24}, \dots$$

In alternativa posso definirle come prima facendo finta che i termini $a_0, a_1, \dots, a_{21}$ siano tutti 0.

Oss. Se in una serie cambio un numero finito di termini, allora non cambia il comportamento, ma al più cambia il valore dell'eventuale somma. Di conseguenza il comportamento di una serie (cioè l'essere di tipo ①, ②, ③, ④) dipende da come è fatta a_n definitivamente.

Condizione necessaria Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$

Conseguenza. Devo studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Provo a fare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

- Se il limite non viene 0 (cioè viene un certo $l \in \mathbb{R}$ con $l \neq 0$), allora di sicuro la serie non converge (e le restano 3 comportamenti possibili).
- Se il limite viene 0, allora BOK (cioè la serie può convergere, ma non è obbligata a farlo (restano 4 comportamenti possibili)).

Dim.: Sia s_n la successione delle somme parziali. Per ipotesi la serie converge, dunque $s_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Ora $a_n = s_n - s_{n-1}$

$$(s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}))$$

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$l - l = 0 \quad \text{Quindi } a_n \rightarrow 0.$$

Proprietà algebriche $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

La serie della somma è la somma delle serie nelle stesse ipotesi in cui il limite della somma è la somma dei limiti.

Dim.: Pongo $c_n = a_n + b_n$. Chiamo $s_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
 $s_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$
 $s_n^c = c_0 + c_1 + \dots + c_n$

Allora $s_n^c = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$ (proprietà commutativa)
 $= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$ (somme finite)
 $= s_n^a + s_n^b$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^c = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n^a + s_n^b) = \text{(tranne in certi casi)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^a + \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^b = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (dim. per esercizio)

Achtung! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (tranne casi speciali)

Vale anche per le somme finite $a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$

SERIE GEOMETRICHE Sono le serie con $a_n = a^n$, dove a è un parametro

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots \quad (\text{somma potenze di un certo } a \text{ fisso})$$

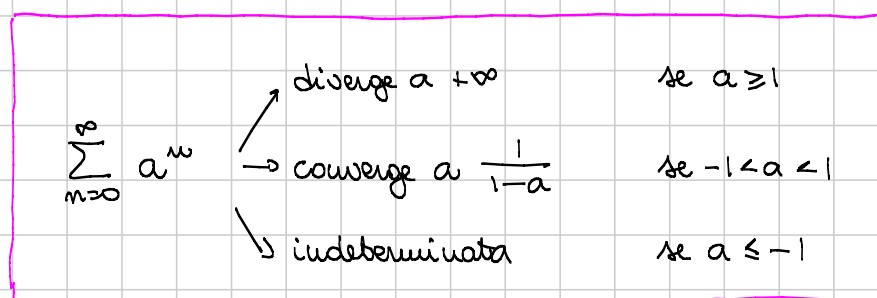
A suo tempo per induzione si è dim. che

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{se } a \neq 1)$$

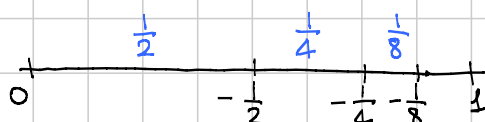
Bisogna fare il limite per $n \rightarrow +\infty$. Ci sono vari casi

- Se $a > 1$, allora num $\rightarrow +\infty$, den. > 0 , quindi $s_n \rightarrow +\infty$ e la serie diverge a $+\infty$
- Se $-1 < a < 1$, cioè $|a| < 1$, allora $a^{n+1} \rightarrow 0$, quindi $s_n \rightarrow \frac{-1}{a-1}$ cioè la serie converge a $\frac{1}{1-a}$
- Se $a = -1$, allora denum $= -2$, e num. è alternativamente $0, -2$, quindi la serie non converge (è l'esempio banale 3): è indet.
- Se $a < -1$, allora denum $= a-1 =$ numero negativo e numeratore $\rightarrow +\infty$ se n è dispari ($n+1$ diventa pari) e numeratore $\rightarrow -\infty$ se n è pari. Quindi s_n non ha limite e la serie è indeterminata.
- Se $a = 1$, allora non posso usare la stessa formula, ma siamo nell'esempio banale 2 e la serie diverge a $+\infty$.

In conclusione per la serie geometriche abbiamo che



Oss. Paradosso di Zenone



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \text{serie geometrica che converge a } 1.$$

Oss. Si chiamano telescopiche le serie in cui c'è questo fenomeno di cancellazione. Sono sostanzialmente le uniche serie (oltre alle geometriche) per cui è facile calcolare la somma s_n .

Oss. Nei 2 esempi precedenti la condizione necessaria è soddisfatta (cioè $a_n \rightarrow 0$), ma la serie in un caso converge, nell'altro no.

Obiettivo futuro: studiare la convergenza di una serie (cioè stabilire se è di tipo ① o no) SENZA trovare una formula esplicita per s_n . Si vuole sapere solo se il limite di s_n è $\in \mathbb{R}$ oppure no, senza voler sapere il valore.

CRITERI DI CONVERGENZA Rispondono al problema precedente.

Serie a termini ≥ 0 ($a_n \geq 0$ definitivamente)
(basta a_n a segno costante: altrimenti "porto fuori il -")

- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Criterio del confronto
- Criterio del confronto asintotico $\nearrow$ casi standard
 $\searrow$ casi limite

Serie a termini di segno variabile

- Criterio di LEIBNITZ
- Criterio dell'assoluta converg.

Serie con $a_n \geq 0$ Fatto fondamentale: una serie con $a_n \geq 0$ definitivamente ha solo 2 possibilità:

- convergere
- divergere a $+\infty$

Dim.: Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora s_n è definitivamente debolmente crescente ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$). Quindi per il teorema sulle successioni monotone si conclude.

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\arctan \frac{n^2+3}{n^2+7}}_{a_n}$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 $a_n \rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \neq 0$

$a_n \geq 0 \Rightarrow$ può solo convergere o divergere a $+\infty$

$a_n \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ condizione necessaria non verificata $\Rightarrow$ non può conv.

Quindi l'unica possibilità è che la serie diverga a $+\infty$ (cioè $s_n \rightarrow +\infty$).
 — o — o —

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente. Supponiamo che
 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Allora

- Se $l > 1$, la serie diverge
- Se $l < 1$, la serie converge
- Se $l = 1$, allora B.N.

Criterio del rapporto. Come sopra con $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$.

Criterio del confronto Siano a_n e b_n 2 successioni con
 $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente

Allora valgono queste implicazioni (e solo questo)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge (ad un valore più piccolo)}$$

Criterio del confronto asintotico (caso standard)

Siano a_n e b_n 2 successioni con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \neq +\infty$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento (se una converge, allora converge anche l'altra (magari ad un valore diverso); se una diverge, allora diverge anche l'altra).

Operativamente, confronto e confronto asintotico permettono di dedurre il comportamento di una serie con termine a_n dato dal comportamento di una serie nota con termine b_n .

Quindi serve una tabellina di serie con cui confrontare. Già abbiamo le serie geometriche.

Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA I — LEZIONE 040

Titolo nota

22/10/2011

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2^n}$
 a_n

 $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+3} = \frac{1}{2} \frac{n+4}{n+3} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$

Limite del rapporto $< 1 \Rightarrow$ la serie converge.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n!}$

 $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow 0$

Criterio del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} + (n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n + n^2}$
 $= \frac{1}{n+1} \frac{2^{n+1} + (n+1)^2}{2^n + n^2} = \frac{1}{n+1} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{1 + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{1 + \frac{n^2}{2^n}} \rightarrow 0$

Limite del rapporto $< 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 3 $\sum_{n=10}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

 $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n \rightarrow$ non chiarissimo per ora

Criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ a cosa tende?
 $\sim \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
 $= e$

Faccio il limite dell'esponente

$n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ Pongo $x = -\frac{1}{n}$ e diventa il solito

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{-x} = -1$ (Brutale: $n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \sim -1$)

Quindi $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Brutale: $a_n \sim \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ geometrica con $a = \frac{4}{5} \Rightarrow$ converge

Rigoroso 1° modo: criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}} = \sqrt[n]{\frac{4^n \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{5^n \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}} = \frac{\frac{4}{5}}{\left\{ \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} \right\}^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{4}{5}$$

$\downarrow \frac{4}{5}$ $\downarrow 1$

Quindi $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

Rigoroso 2° modo: confronto asintotico con $b_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n} \cdot \frac{5^n}{4^n} = \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} \rightarrow 1 \neq 0, \neq \pm\infty$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$. Ora $\sum b_n$ so che converge perché è geometrica con ragione $a = \frac{4}{5}$, dunque converge. Ma allora converge anche $\sum a_n$, che è quella data.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 6n^2 + 1}$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge perché armonica generalizzata con $\alpha = 1$.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ (suggerito sopra)

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 3}{n^3 + 6n^2 + 1} \cdot n = \frac{n^3 + 3n}{n^3 + 6n^2 + 1} \rightarrow 1 \neq 0, \neq \pm\infty$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, cioè diverge.

Esempio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n! + 5}{n+7}$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
 infatti $\sin n + \cos n! + 5 \geq 3$

Ora abbiamo che

$$\underbrace{\frac{\sin n + \cos(n!) + 5}{n+7}}_{a_n} \geq \underbrace{\frac{3}{n+7}}_{b_n}$$

(ho preso la disug. di sopra e diviso per $n+7$ che è > 0)

Ora $\sum b_n = \sum \frac{3}{n+7}$ diverge per confronto asintotico con $\sum \frac{1}{n}$ (stile esempio 5), quindi per confronto semplice anche $\sum a_n$ diverge ($+\infty$).

Esempio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \sinh\left(\frac{n^2+5}{n^4-25n^2+2}\right)$ $a_n \geq 0$ definitivamente
 (denominatore $\rightarrow \infty$, quindi denominatore > 0 definitiv.)

Brutale: $a_n \sim \sinh\left(\frac{n^2}{n^4}\right) = \sinh\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

$\sinh x \sim x$ per $x \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ armonica generalizzata con $a=2 \Rightarrow$ converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \sinh\left(\frac{n^2+5}{n^4-25n^2+2}\right) \cdot n^2 = \frac{\sinh(\dots)}{(\dots)} \cdot \frac{n^2+5}{n^4-25n^2+2} \cdot n^2 \rightarrow 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1
 Pongo $x = \dots$
 Quando $n \rightarrow \infty$ ho che $x \rightarrow 0$
 e ottengo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ che converge perché armonica generalizzata con $a=2$.

Esempio 8 $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \arctan\left(\frac{n^3}{3^n}\right)$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Brutale: $a_n = n^2 \cdot \arctan\left(\frac{n^3}{3^n}\right) \sim n^2 \cdot \frac{n^3}{3^n} = \frac{n^5}{3^n} = b_n$
 $\downarrow$ $\uparrow$
 0 $\arctan x \sim x$ quando $x \rightarrow 0$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{n^5}{3^n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \dots \rightarrow 1 \neq 0, \neq +\infty$ Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$

Ora $\sum b_n$ lo studio con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3} \sqrt[n]{n^5} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$$

Quindi $\sqrt[n]{b_n} \rightarrow \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum b_n$ converge per il criterio della radice

$\Rightarrow \sum a_n$ converge per confronto asintotico.
 — 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 41

Titolo nota

26/10/2011

Data a_n si costruisce $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ succ. somme parziali
 $s_n \rightarrow ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

termini ≥ 0

Criterio del confronto Sia $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Dim.: Sia $s_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $s_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$.

A meno di cambiare un numero finito di termini (che non cambia il comportamento delle serie) possiamo assumere che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha che

$$s_n^a \leq s_n^b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ci sono allora 2 situazioni.

Caso 1: se $\sum a_n = +\infty$, allora $s_n^a \rightarrow +\infty$, ma allora $s_n^b \rightarrow +\infty$, che è come dire che $\sum b_n = +\infty$

Caso 2: se $\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow s_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow s_n^a$ non può tendere a $+\infty$. Dovendo avere limiti (è monotona crescente) per forza $s_n^a \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ (con $l_1 \leq l$), quindi $\sum a_n \text{ converge}$.

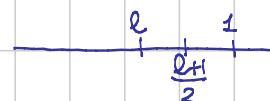
Criterio della radice Se $a_n \geq 0$ definitivamente, e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$
- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$
- $l = 1 \Rightarrow \text{Boh.}$

Dim.: Caso $l > 1$ Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ per il criterio della radice applicato ai limiti, ma allora niente cond. necessaria, quindi la serie non può convergere, quindi diverge a $+\infty$ (termini ≥ 0).

Caso $l < 1$ Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$, quindi la serie potrebbe convergere, ma non è obbligata a farlo (FALSA PARTENZA!!)

Partenza giusta: se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora



$0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitivamente. Elevando alla n !

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \Rightarrow b_n$$

Ora $\sum b_n$ è una serie geometrica con ragione $\frac{l+1}{2} < 1$, quindi converge perché già dimostrato. Per confronto anche $\sum a_n$ converge.

— 0 — 0 —

Oss. Il caso $l > 1$ del criterio del rapporto si dimostra come il caso $l > 1$ del criterio della radice.

Il caso $l < 1$ è più delicato, così come per le successioni.

— 0 — 0 —

Criterio del confronto asintotico. Sia $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0$.

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si comporta come $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dim.: Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora



$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l$ definitivamente.

Moltiplico per b_n senza cambiare i versi (perché $b_n > 0$):

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l b_n$$

Caso 1 $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum 2l b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
↑
 disuguaglianza di dx + confronto

Caso 2 $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{l}{2} b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$
↑
 $\frac{l}{2} > 0$
 disuguaglianza di dx + confronto.

Casi limite di confronto asintotico. Sia $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

① Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$

[... allora $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ definitivamente, cioè $a_n \leq b_n$ definitivamente, quindi]

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH.}$$

② Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

[... allora $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ definitivamente, cioè $a_n \geq b_n$ definitivamente, quindi]

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \text{BOH} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\log n}{n}} = a_n \quad a_n > 0 \text{ definitivamente.}$

Provo il confronto con $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n} \cdot n = \log n \rightarrow +\infty \quad (\text{caso limite})$$

[$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \dots \Rightarrow a_n \geq b_n \text{ definitivamente.}$]

$\sum \frac{1}{n} = +\infty$ perché armonica generalizzata con $a=1 \geq 1$, quindi

$$\sum a_n = \sum \frac{\log n}{n} = +\infty$$

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n^2 \log n}} = a_n \quad \text{Provo confronto asintotico con } b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2 \log n} \cdot n^2 = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ definitivamente} \right]$$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge (armonica generalizzata con $a=2 > 1$)

Quindi $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2 \log n}$ converge.

Esempio 3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^7 n}{n^2}$

Tentativo 1: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^7 n}{n^2} \cdot n^2 = \log^7 n \rightarrow +\infty \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n \geq b_n \dots \right]$$

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ non !!

Tentativo 2: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

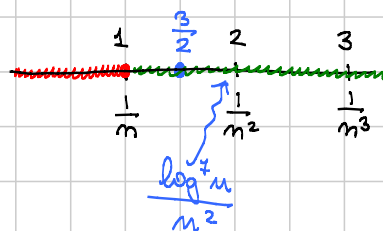
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^7 n}{n^2} \cdot n = \frac{\log^7 n}{n} \rightarrow 0 \quad \left[\dots \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ definitivamente} \right]$$

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n$ non !!

Tentativo 3 Confronto asintotico con

$$b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^7 n}{n^2} \cdot n^{3/2} = \frac{\log^7 n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$



$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ definitivamente} \right]$$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ e converge ($\frac{3}{2} > 1$) $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Oss. Invece di $\frac{3}{2}$ posso usare qualunque esponente α con $1 < \alpha < 2$.

per serie
convergenti.

per $\lim = 0$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 042

Titolo nota

26/10/2011

SERIE CON TERMINI A SEGNO VARIABILEDue criteri $\rightarrow$ LEIBNITZ $\rightarrow$ ASSOLUTA CONVERGENZACriterio di Leibnitz (serie a segno alternato)

Consideriamo una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{(-1)^n a_n} = a_n$$

Supponiamo 3 ipotesi:

(i) $a_n \geq 0$ definitivamente (questo è come dire che a_n è a segno alternato)(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente (cioè a_n è debolmente decrescente)(iii) $a_n \rightarrow 0$ (legato alla condizione necessaria).

Allora la serie converge.

Oss. Se qualcuna delle ipotesi fallisce, allora boh (rimangono aperte tutte e 4 le possibilità).Oss. Si ha che $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow a_n \rightarrow 0$ (convincerene!!).

Quindi se fallisce l'ipotesi (iii), allora fallisce la condizione necessaria, quindi la serie non converge (e restano 3 possibilità).

Criterio assoluta convergenza $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.Utilizzo operativo assoluta convergenza. Devo studiare $\sum a_n$.① Provo a studiare $\sum |a_n|$: è a termini ≥ 0 , quindi ho + possibilità.② Se $\sum |a_n|$ converge, allora converge anche $\sum a_n$ ③ Se $\sum |a_n| = +\infty$, allora boh (bisogna provare altro).

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Serie a segno alternato con $a_n = \frac{1}{n}$.

Faccio i 3 controlli:

(i) $a_n \geq 0$, cioè $\frac{1}{n} \geq 0$: banale

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$, cioè $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$: vero per ogni $n \geq 1$ (denom. + grande, frazione + piccola).

(iii) $a_n \rightarrow 0$: banale.

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Cosa succedeva usando l'assoluta convergenza? $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, quindi $|a_n| = \frac{1}{n}$, quindi

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n} = +\infty, \text{ quindi no!}$$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

Con Leibnitz funziona come prima: $a_n = \frac{1}{n^2}$ (fare i controlli)

Con l'assoluta convergenza ho che $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^2}$ che converge, quindi $\sum a_n$ converge.

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^3}$

Metodo 1: $\frac{\cos(n!)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$
 $\underbrace{\frac{\cos(n!)}{n^3}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{b_n}$

Ora $\sum b_n$ converge (armonica con $a=3>1$)
 quindi $\sum a_n$ converge

NO!!!!!!

Achtung! Il criterio del confronto vale solo tra serie con termini ≥ 0 , e in questo caso non ho nessuna garanzia che $\cos(n!) \geq 0$

Metodo 2 Essendo a_n a segni variabili, provo con l'assoluta convergenza.

Studio quindi $\sum |a_n| = \sum \frac{|\cos(m!)|}{n^3}$

Ora $\frac{|\cos(m!)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ per ogni $n \geq 1$, quindi ho che

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^3} \text{ converge perché}} \Rightarrow \boxed{\sum \frac{|\cos(m!)|}{n^3} \text{ converge}} \Rightarrow \boxed{\sum \frac{\cos(m!)}{n^3} \text{ converge}}$$

confronto tra serie a termini ≥ 0 criterio assoluta convergenza.

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{n^2+3}{n^2+2}$ Leibnitz...
"du"

Ora $du \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow du$ non tende a 0 $\Rightarrow$ manca la condizione necess.
 $\Rightarrow$ la serie non converge. Restano 3 possibilità.

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$
"du"

Facciamo i 3 controlli:

(i) $du \geq 0$: assolutamente vero per ogni $n \geq 1$

(ii) $du \rightarrow 0$: banale $du \rightarrow \sin 0 = 0$.

(iii) Debole decrescenza: devo vedere se $a_{n+1} \leq a_n$, cioè se

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Posso eliminare $\sin$ in quanto è funzione stric. crescente: resta

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{e questa è vera perché denominatore + piccolo} \\ \Rightarrow \text{frazione + grande.}$$

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Esempio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^7 + 5n^5 + 3}{n^8 - 7n^7 + 5n^2 - 14} = du$

(i) $du \geq 0$: vera definitivamente perché numeratore e denominatore tendono a $+\infty$, quindi sono definitivamente > 0

(iii) $a_n \rightarrow 0$: vero per confronto di ordini di infinito.

(iv) $a_{n+1} \leq a_n$: la disuguaglianza è il p.to debole di Leibnitz

Meglio cambiare strada e provare l'assoluta convergenza...

$\sum |a_n| = \sum a_n$ e questa converge per confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.
 definitivamente la frazione è > 0 Quindi la serie originaria converge.

Esempio $\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}$

Con l'assoluta convergenza non viene... (provare!)

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right\} = \sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right\}$$

converge per Leibnitz facile

$$\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} = \frac{n^3+2n - n^3-3}{n(n^3+3)} = \frac{2n-3}{n^4+3n} \quad \text{quindi}$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right\} = \sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n} \quad \text{e questa converge per assoluta convergenza.}$$

Conclusione: la serie data è somma di 2 serie convergenti, quindi converge.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 043

Titolo nota

27/10/2011

Assoluta convergenza $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

(Terminologia: una serie si dice convergente se converge, si dice assolutamente convergente se $\sum |a_n|$ converge)

Esempi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente (per Leibnitz), ma non assolutamente convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ è assolutamente convergente, quindi anche convergente

Dim.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - |a_n| + |a_n|) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| - a_n)$

Basta dimostrare che le ultime 2 serie convergono. La 1ª converge per ipotesi. Per la 2ª osservo che

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per dimostrare queste 2 uguaglianze basta considerare il caso $a_n \geq 0$ (in cui viene $0 \leq 0 \leq 2|a_n|$) e il caso $a_n < 0$ (in cui viene $0 \leq -2a_n \leq -2a_n$).

Ora applico il criterio del confronto: $\sum 2|a_n|$ converge per ipotesi, dunque $\sum (|a_n| - a_n)$, che è a termini ≥ 0 , converge pure lei.

— 0 — 0 —

Leibnitz $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ (i) $a_n \geq 0$ definiti.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ "

(iii) $a_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.

Dim.: Devo dimostrare che la successione delle somme parziali ha limite.

Intanto assumo che (i) e (ii) siano veri per ogni $n \in \mathbb{N}$ (altrimenti cambio un numero finito di termini). Ora

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 - a_1, \quad s_2 = a_0 - a_1 + a_2, \quad s_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \dots$$

Dico che $\Delta_{2n+2} \leq \Delta_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{2n+3} \geq \Delta_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Infatti: $\Delta_{2n+2} = \Delta_{2n} - \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2}$
 $= \Delta_{2n} - (\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2}) \leq \Delta_{2n}$
 ≥ 0 per (ii)

e stessa cosa sui dispari

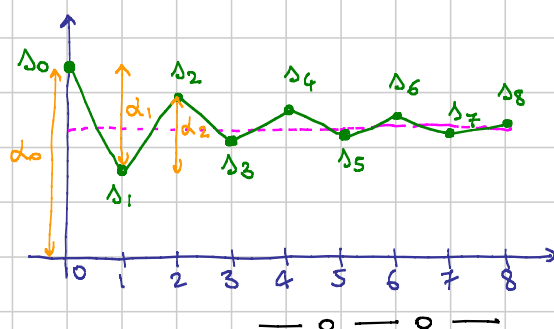
Inoltre dico che $\Delta_{2n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Esercizio: dimostrarlo per bene)
 $\Delta_{2n+1} \leq d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. per involuzione)

Allora per il teorema sulle successioni monotone avviene che

$$\Delta_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Delta_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}. \quad \text{Vourei concludere che } m = l.$$

Ma $\Delta_{2n+1} - \Delta_{2n} = -\alpha_{2n+1}$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \leftarrow \text{per ipotesi (iii)}$
 $m - l = 0$

Graficamente, se rappresento le Δ_n , ottengo un disegno del tipo



i pari scendono
 i dispari salgono
 la differenza tende a 0

SERIE DI POTENZE

Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

dove c_n sono numeri dati, chiamati coefficienti, e x è un parametro reale.

Bruttalmente: è un polinomio di grado infinito, cioè la somma di infinite potenze della x .

DOMANDE: ① Per quali valori di x la serie converge?

② Quando converge, quanto vale la somma?

Esempio Nel caso in cui $c_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, cioè la serie geometrica di ragione x . Quindi

① converge $\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

② quando converge, la somma è $\frac{1}{1-x}$

Oss. Relativamente alla domanda ①, la serie converge sempre almeno per $x=0$, e la somma è c_0 .

Teorema 1 (Raggio di convergenza). Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ tale che

(i) per ogni $x \in (-R, R)$, cioè quando $|x| < R$, la serie converge assolutamente, quindi in particolare converge;

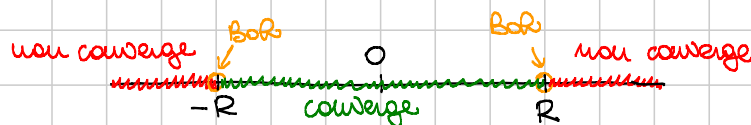
(ii) per ogni $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$, cioè quando $|x| > R$, la serie non verifica la condizione necessaria, quindi non converge;

(iii) per $x = \pm R$, cioè quando $|x| = R$, dipende dai casi (il comportamento può anche essere diverso in $+R$ e $-R$).

Oss. ① Se $R = +\infty$, allora siamo sempre nel caso (i) e la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

② Se $R = 0$, allora la serie non converge per ogni $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ già sappiamo che converge a c_0

③ Se $R \in (0, +\infty)$, allora abbiamo questa situazione



Questo giustifica porre $R =$ raggio di convergenza.

Teorema 2 (Calcolo di R). Consideriamo una serie di potenze.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (interpretato anche per $L=0$ e $L=+\infty$).

Oss. Il teorema non si applica quando $\sqrt[n]{|c_n|}$ non ha limite.

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. È una serie di potenze con $c_n = \frac{1}{n^2}$

$$\text{Allora } \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie converge per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$.

Controllo "a mano" $x=1$ e $x=-1$

Per $x=1$ ottengo $\sum \frac{1}{n^2}$, che converge

Per $x=-1$ " $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$, che converge, anche assolutamente.

Conclusione $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! + n^3}$. Serie di potenze con $c_n = \frac{1}{n! + n^3}$

$$\text{Allora } \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n! + n^3}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n! + n^3}} = 0 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = +\infty$$

Conclusione: la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 044

Titolo nota

27/10/2011

Calcolo raggio di convergenza. Supponiamo che $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow L$. Allora

- se $|x| < \frac{1}{L}$ la serie converge assolutamente
- se $|x| > \frac{1}{L}$ la serie non verifica la condizione necessaria.

Dim.: Facciamo il caso in cui $L \in (0, +\infty)$ (gli altri 2 casi sono più semplici e si fanno sostanzialmente allo stesso modo: esercizio!).

Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{c_n x^n} = a_n$$

Provo a studiarla con l'assoluta convergenza, cioè studio

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$$

Questo lo studio con il criterio della radice. Considero

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \rightarrow L \cdot |x|$$

Caso 1 Se $L \cdot |x| < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, si ha che $\sum |a_n|$ converge per il criterio della radice, cioè $\sum a_n$ converge assolutamente.

Caso 2 Se $L \cdot |x| > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, si ha che $\sum |a_n| = +\infty$ per il criterio della radice, quindi ~~boh~~ (falsa partenza!).

Tuttavia: se $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow L \cdot |x| > 1$, cioè $|x| > \frac{1}{L}$, allora per il criterio della radice applicato ai limiti si ha che $|a_n| \rightarrow +\infty$, quindi non è possibile che $a_n \rightarrow 0$ (perché altrimenti anche $|a_n| \rightarrow 0$). Ne segue che $\sum a_n$ non verifica la condizione necessaria, dunque non può convergere.

— o — o —

SERIE DI TAYLOR Sia $f(x)$ una funzione derivabile infinite volte in un intorno dell'origine. Si definisce serie di Taylor la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Si tratta della serie di potenze le cui somme parziali (ottenute fermandosi ad un certo valore di n) sono i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Esempi $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$ è la serie di Taylor della funzione e^x .

Teorema 3 Per tutte le funzioni ragionevoli (cioè per tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante ... al di fuori dei problemi burocratici) si ha che la serie di Taylor **DOVE CONVERGE**, cioè per i valori di x per cui converge, ha come somma la funzione stessa, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in \text{ZONA CONVERGENZA.}$$

Brutalmente: la funzione è uguale alla somma della serie.

Esempio 1 Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. È ovvio che la serie converge (per criterio rapporto o criterio radice).

La interpreto come caso $x=2$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

che è la serie di Taylor di $f(x) = e^x$. Quindi, dove converge, si ha che la somma è e^x . Quindi nel vostro caso la somma è e^2 , purché $x=2$ sia nella zona di convergenza. Quindi calcolo R:

poiché $c_n = \frac{1}{n!}$ abbiamo che $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 = L$

Quindi $R = \frac{1}{L} = +\infty$, dunque la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Conclusione: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.
— o — o —

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Serie di potenze con $c_n = \frac{1}{n}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1.$$

- Per $x \in (-1, 1)$ la serie converge (anche assolutamente)
- Per $|x| > 1$ la serie non converge (manca condiz. necessaria)
- Per $x = 1$ ottengo $\sum \frac{1}{n}$ che diverge a $+\infty$
- Per $x = -1$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ che converge per Leibnitz

Conclusione per la convergenza: la serie data converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1)$.
A cosa converge? Dobbiamo trovare uno $f(x)$ la cui serie di Taylor sia quella data

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (\text{cambiamo i segni sui dispari})$$

$$\text{Quindi} \quad -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\text{e pertanto} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

$$\forall x \in [-1, 1)$$

ZONA DI CONVERGENZA
CALCOLATA PRIMA

In particolare, per $x = -1$ ottengo

$$-\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

Esempio 3 Calcolare $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

Più formalmente: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

Perché converge? Per Leibnitz (non per assoluta convergenza perché diventerebbe $\sum \frac{1}{2n+1} = +\infty$).

La serie data è il caso $x=1$ della serie di potenze $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$, cioè la serie di Taylor di $\arctan x$. Quindi

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \forall x \in \text{zona di convergenza}$$

Se $x \in \text{zona di convergenza}$, allora la somma fa $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Qual è il raggio di convergenza?

Si potrebbe provare con $\sqrt[n]{|a_n|}$, ma (achtung!) $a_n = 0$ per n pari e $a_n = \pm \frac{1}{n}$ per n dispari, quindi il limite richiesto non esiste...

Tuttavia per il teorema 1 sappiamo che esiste R t.c.

Dove sta $x=1$?

• Se stesse in zona rossa, la serie non convergerebbe

• " " " " verde, " " convergerebbe assolutamente.

~~-----~~
-R 0 R

L'unica possibilità è che sia $R=1$. Per sostituzione di $x=\pm 1$ si vede che la serie di Taylor di $\arctan x$ converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.

Posso quindi concludere che

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 045

Titolo nota

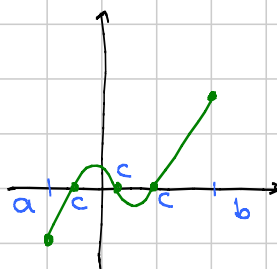
28/10/2011

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè $f(x)$ assume valori di segno diverso ai 2 estremi). Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Interpretazione grafica

C'è almeno un punto (non necessariamente unico) in cui $f(x) = 0$.



Prima variante Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$ (o viceversa). Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = \lambda$.

Dim. variante : considero $g(x) = f(x) - \lambda$. Si verifica che $g(a) = f(a) - \lambda < 0$ e $g(b) = f(b) - \lambda > 0$. Quindi $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$ e g è continua. Quindi esiste $c \in (a, b)$ t.c. $g(c) = 0$, cioè $f(c) - \lambda = 0$, cioè $f(c) = \lambda$.

Seconda variante Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Siano $L = \sup \{ f(x) : x \in (a, b) \}$ e $l = \inf \{ f(x) : x \in (a, b) \}$

(nota: L ed l sono delle quote, eventualmente anche $\pm \infty$).

Sia λ tale che $l < \lambda < L$.

Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = \lambda$.

Detto in altri termini: una funzione in un intervallo (a, b) assume tutti i valori intermedi tra il suo inf e il suo sup.

I valori l ed L possono essere assunti o no a seconda dei casi.

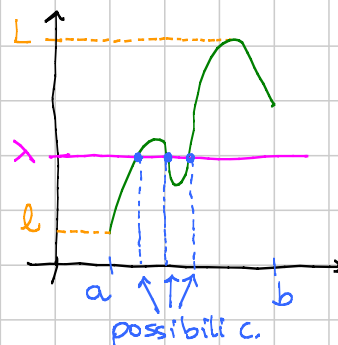
Oss. La 2ª variante si chiama TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Interpretazione grafica.Dim. 2ª variante:

- Poiché $l < \lambda$ ed l è l'inf, esiste un p.to $A \in (a, b)$ t.c. $f(A) < \lambda$
- Poiché $\lambda < L$ ed L è il sup, esiste un p.to $B \in (a, b)$ t.c. $f(B) > \lambda$

Non so chi è + grande tra A e B , ma comunque posso applicare la 1ª variante nell'intervallo di estremi A e B .

— o — o —

Dim. te. esistenza degli zeri

Supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

(nel caso contrario la dimostrazione è la stessa, oppure cambio $f(x)$ con $-f(x)$).

Pongo

$$c = \inf \{ x \in (a, b) : f(x) > 0 \}$$

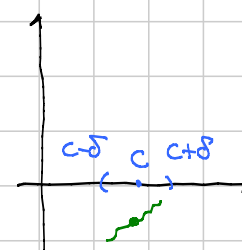
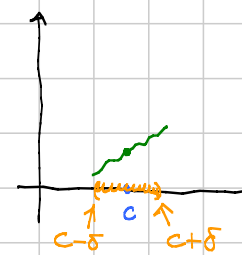
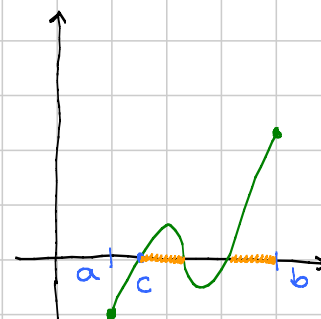
Dico che $f(c) = 0$. Supponiamo che per assurdo non sia così.

Allora ci sono due possibilità.

$f(c) > 0$ Allora per continuità $f(x) > 0$ in un intorno del tipo $(c-\delta, c+\delta)$ per un opportuno $\delta > 0$, ma allora c non sarebbe l'inf, perché l'inf. sarebbe più basso.

$f(c) < 0$ Per continuità sarebbe $f(x) < 0$ in $(c-\delta, c+\delta)$ per un $\delta > 0$ opportuno. Ma allora c non sarebbe l'inf, perché l'inf. sarebbe più grande. (Nota bene: per la caratterizzazione dell'inf, in ogni intorno destro di c dovrai trovare dei pti x t.c. $f(x) > 0$).

— o — o —

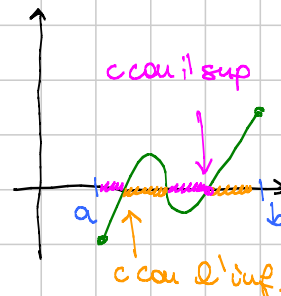


Oss. Avrei potuto fare la stessa dimostrazione ponendo

$$c = \sup \{ x \in (a, b) : f(x) \leq 0 \}$$

Avrei ottenuto lo stesso c ? Dipende: se il c è unico certamente sì, ma in generale no.

Domanda: è vero che con l'inf trovo il più piccolo c possibile, e con il sup trovo il più grande c possibile?



Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$x^2 = \sin x + 8$$

ha almeno una soluzione reale.

Pongo $f(x) = x^2 - \sin x - 8$. Cerco un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (pà uso che $f(x)$ è continua).

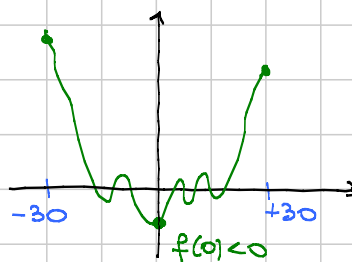
Basta prendere $a = 0 : f(0) = -8 < 0$

$$b = 30 : f(30) = 900 - \sin 30 - 8 \geq 900 - 9 > 0$$

Quindi di sicuro esiste $c \in (0, 30)$ t.c. $f(c) = 0$. Questo c risolve l'equazione iniziale.

Si può dire di più: guardiamo l'intervallo $[-30, 0]$. Si ha che $f(-30) = 900 - \sin(-30) - 8 > 0$ mentre $f(0) = -8 < 0$.

Quindi esiste una soluzione anche in $(-30, 0)$.



Esempio 2 Domanda: la funzione $f(x) = x^7 + \log(1+x^{20})$ è surgettiva? Si intende vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Caratterizzazione della surgettività: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x) = \lambda$$

ha almeno una soluzione reale.

Grazie alla 1ª variante basta trovare un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$.

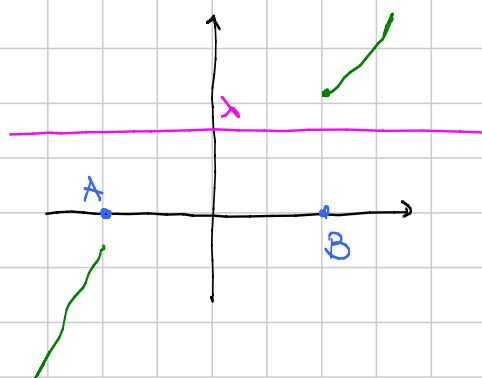
Osservazione fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Per definizione di limite ho che

- esiste $A < 0$ t.c. $f(A) < \lambda$
(è infatti vero "definitivamente" a sinistra)
- esiste $B > 0$ t.c. $f(B) > \lambda$
(questo è vero "definitivamente" a destra).



Basta applicare la 1ª variante in $[A, B]$.

Fatto generale Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (o viceversa)

Allora f è surgettiva.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 046

Titolo nota

28/10/2011

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

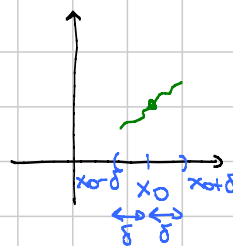
Obiettivo: capire come è fatto il grafico di una funzione vicino ad un p.to dato (in un suo intorno)

Monotonia 1 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0 \in A$.

Supponiamo che $f'(x_0) > 0$ (esiste ed è positiva).

Allora esiste $\delta > 0$ b.c.

- $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$
- $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0)$



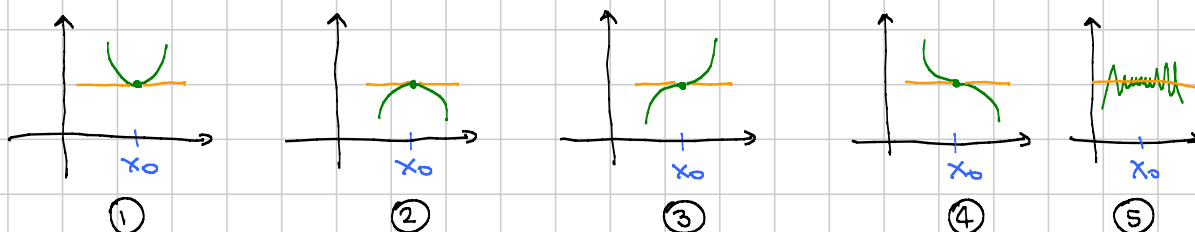
Achtung! NON ho detto che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x)$ è monotona in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Oss. Se avessi supposto $f'(x_0) < 0$, allora la conclusione era

- $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
- $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Cosa succede se $f'(x_0) = 0$ (i p.ti in cui succede si chiamano p.ti stazionari)

In questo caso ci sono 5 comportamenti possibili;



① Minimo locale

② Massimo locale

③ Plesso a tangente orizzontale ascendente

④ " " " " discendente

⑤ ↑
Patologia...

Come riconoscere il tipo di situazione locale ?Criterio delle derivate successive

Cerco la prima derivata che non si annulla in x_0 . Sia questa di ordine k , cioè

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Allora

- k pari e $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ minimo locale
- k pari e $f^{(k)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ massimo locale
- k dispari e $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ flesso a tang. orizz. ascendente
- k dispari e $f^{(k)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ " " " " discendente

Oss. Il caso ⑤ si può verificare solo se tutte le derivate in x_0 sono nulle, oppure qualche derivata non esiste. Ovviamente in questi casi non si è per forza nella situazione ⑤.

Dim. monotonia 1 Ipotesi $f'(x_0) > 0$, cioè

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Per permanenza del segno si ha che esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione, cioè il rapporto incrementale, è > 0 per ogni $h \in (-\delta, \delta)$.

- Se $h > 0$ il numeratore deve essere > 0 , cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (0, \delta)$ p.to qualunque in $(x_0, x_0+\delta)$
- Se $h < 0$ il numeratore deve essere < 0 , cioè $f(x_0+h) < f(x_0)$ per ogni $h \in (-\delta, 0)$ p.to qualunque in $(x_0-\delta, x_0)$

— 0 — 0 —

Dim. criterio derivate successive Taylor!

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$$

Per ipotesi se ne vanno tutti i termini da h fino a h^{k-1} . Quindi resta:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^k)$$

Allora
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{o(h^k)}{h^k}$$

Facendo il limite ottengo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ora ragioniamo come in monotonia 1

Caso 1: k pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ Esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è > 0 per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

- Per $h > 0$ il denom. è > 0 , quindi numeratore > 0 , cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (0, \delta)$ [un po' dopo x_0 , $f(x)$ vale di +]
- Per $h < 0$ il denom. è > 0 (perché k è pari), quindi come prima $f(x_0+h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (-\delta, 0)$ [un po' prima di x_0 , $f(x)$ vale di +]

Caso 2: k dispari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ Esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è < 0 per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

- Per $h > 0$ il denom. è > 0 , quindi numeratore < 0 , cioè $f(x_0+h) < f(x_0)$... [un po' dopo vale -]
- Per $h < 0$ il denom. è < 0 (k è dispari), quindi numeratore > 0 , cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$... [un po' prima vale +]

Esercizio: fare i 2 casi rimanenti

Criterio ri-enunciato Nell' intorno di un p.to stazionario una funzione $f(x)$ si comporta come il primo termine non nullo (e non costante) del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$x^{22} + \arctan x^{44} - 7x^3 - \sin x^2 = 0$$

ha almeno 3 soluzioni reali.

Sia $f(x)$ la funzione in questione. Intanto $f(0) = 0$, il che ci dà subito una soluzione. Si vede subito che

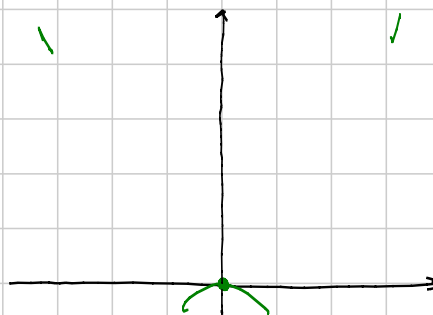
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Studio locale nell'intorno di $x=0$

$$f(x) = -x^2 + o(x^2)$$

↑
proviene
da $\sin x^2$

↑
si mangia tutto
il resto



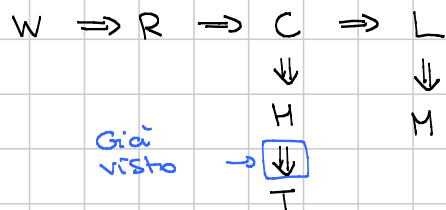
Quindi $f(x)$ si comporta vicino a $x=0$ come $-x^2$ (nota bene: $f'(x_0) = 0$ perché non c'è x nel polinomio di Taylor), quindi $f(x)$ ha un max locale in $x=0$, quindi $f(x) < 0$ in un intorno di $x=0$ (destra e sinistra).

Questo ci produce gratis una soluzione di $f(x) = 0$ con $x > 0$ ed una soluzione con $x < 0$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 047

Titolo nota

29/10/2011



WEIERSTRASS

ROLLE

CAUCHY

LAGRANGE

HÔPITAL

TAYLOR

MONOTONIA

Terminologia Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che $M = \max \{f(x) : x \in A\}$ se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$.

$m = \min \{f(x) : x \in A\}$ se

(i) $f(x) \geq m$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = m$.

Oss. Med m non sono obbligati ad esistere, ma se esistono sono unici.

Supposto che M esista, allora esiste $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$ e questo x_0 non è obbligato ad essere unico. Tutti gli x_0 t.c. $f(x_0) = M$ si chiamano p.ti di massimo.

Achtung! Mai confondere il massimo M (che è una "y") con i p.ti di max (che sono delle "x").

Esempio 1 $f(x) = \arctan x$
 $A = [0, +\infty)$

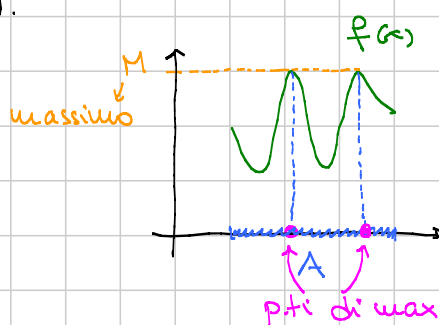
$\max \{ \arctan x : x \in A \}$ N.E.

$\sup \{ \quad \quad \quad \} = \frac{\pi}{2}$

$\min \{ \quad \quad \quad \} = 0$

$\inf \{ \quad \quad \quad \} = 0$

p.to di minimo : $x = 0$.



Esempio 2 $\min \{(x-3)^2 : x \in [0, +\infty)\} = 0$
 P.to di minimo : $x = 3$.



Teorema di WEIERSTRASS Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
intervallo limitato estremi compresi

Allora max e min esistono per forza.

Oss. È importante l'ipotesi che gli estremi siano compresi.

Se ad esempio $A = (0, 1)$, $f(x) = x^2$, allora max e min non esistono, $\inf = 0$, $\sup = 1$.

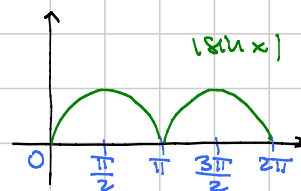
Achtung! Se le ipotesi non sono verificate, max e min possono esistere comunque. Ad esempio: $A = (0, 2\pi)$, $f(x) = |\sin x|$

$$\text{Max } \{ |\sin x| : 0 < x < 2\pi \} = 1$$

$$\text{P.ti di max: } x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{min } \{ |\sin x| : 0 < x < 2\pi \} = 0$$

$$\text{P.to di min: } x = \pi.$$



Ricerca operativa di max e min Supponiamo che max e min esistano (ad esempio per Weierstrass). Per trovarli basta determinare i p.ti di max e di min. Questi si trovano in 3 categorie

- 1 - P.ti stazionari interni: p.ti interni ad A in cui $f'(x) = 0$
- 2 - P.ti singolari interni: p.ti " " " in cui $f'(x)$ non esiste
- 3 - Bordo: p.ti del bordo di A (se A è intervallo sono gli estremi).

Operativamente:

- * si dimostra che max e min esistono (ad esempio con W.)
- * si trovano i p.ti delle 3 categorie (candidati p.ti di max/min)
- * si sostituiscono nella funzione: dove vale di più è il max, dove vale di meno è il min.

Esempio $f(x) = |\sin x|$ $A = [0, 2\pi]$.

Max = 1 p.ti di max: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ di categoria 1

min = 0 p.ti di min: $x = 0$ e $x = 2\pi$ (categoria bordo)

$x = \pi$ (singolare interno: verificare!!)

Variante di Weierstrass Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e periodica.
Allora $\max$ e $\min$ esistono per forza.

Dim.: sia $T > 0$ un periodo di $f(x)$. Considero $[0, T]$. Qui posso applicare W., ottenendo $\max$ e $\min$ in $[0, T]$. Basta ora osservare che $\max$ e $\min$ in $[0, T]$ lo sono pure su tutto $\mathbb{R}$.
Osservazione: in ogni periodo ci saranno nuovi p.ti di $\max$ e di $\min$ (traslati dei precedenti).

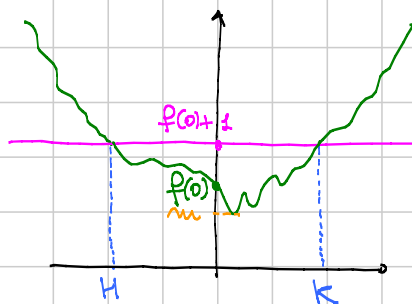
Variante 2 di Weierstrass Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.



Dim.: Considero $f(0)$. Considero $f(0)+1$ e lo uso nella definizione di limitate. Poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ avremo che $\exists k > 0$ t.c. $f(x) \geq f(0)+1$ per ogni $x \geq k$.



Allo stesso modo poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$ avremo che $\exists H < 0$ t.c. $f(x) \geq f(0)+1$ per ogni $x \leq H$.

Considero ora $[H, k]$ dove posso applicare W. classico. Sia

$$m = \min \{ f(x) : x \in [H, k] \}$$

Dico che m è anche minimo su $\mathbb{R}$. Devo verificare che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ci sono 3 casi:

- * se $x \in [H, k]$, allora $f(x) \geq m$ perché m è min in $[H, k]$
- * se $x > k$, allora $f(x) \geq f(0)+1 \geq f(0) \geq m$

$\uparrow$ per la scelta di k $\uparrow$ banale $\uparrow$ perché $0 \in [H, k]$ e qui tutti i valori sono $\geq m$.
- * se $x < H$, è sostanzialmente come il caso precedente.

Oss. I p.ti di minimo sono tutti e soli i p.ti di minimo in $[H, k]$.

Variante della variante Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Allora esiste $\max \{ f(x) : x > 0 \}$. [Dimostrare per esercizio].

Esercizio (Semi-hard) Supponiamo che $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (quindi manca un estremo solo) sia continua.

Possiamo dire qualcosa sull'esistenza di max e/o min. ?

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 048

Titolo nota

29/10/2011

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora per W. max e min esistono.

Dove si trovano i p.ti di max e min? Nelle 3 categorie:

- 1 - p.ti $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$,
- 2 - " " t.c. $f'(x_0)$ non esiste,
- 3 - $x = a$ oppure $x = b$

Dim. Da quovale parte devono stare...

Se stanno sul bordo sono in categoria 3. Sia x_0 p.to di max.

Se $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0)$ non esiste, allora x_0 è categoria 2.

Resta il caso $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0)$ esiste. In questo devo dimostrare che $f'(x_0) = 0$. Supponiamo per assurdo che $f'(x_0) > 0$.

Allora per monotonia 1 esisterebbe $\delta > 0$ t.c. $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Ma allora x_0 non sarebbe p.to di max.

Se invece fosse $f'(x_0) < 0$, allora esisterebbe $\delta > 0$ t.c.

$f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, e questo dice che x_0 non sarebbe p.to di max. L'unica possibilità rimasta è che $f'(x_0) = 0$.

La dimostrazione per i p.ti di min. è analoga (farla!).

Oss. Dove ho usato che x_0 è un p.to interno? Nel potermi spostare un po' a dx, un po' a sx a seconda di quello che serve.

Esercizio. Supponiamo che $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e che $f'(x)$ esista per ogni $x \in [a, b]$. Supponiamo che a sia p.to di max.

Cosa possiamo dire di $f'(a)$? ($f'(a) \leq 0$)

E se a è p.to di min? ($f'(a) \geq 0$)

Stessa cosa scambiando b con a .

— o — o —

Teorema di ROLLE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

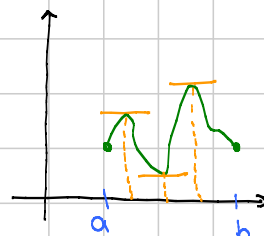
(i) f è continua in $[a, b]$ (chiuso)

(ii) f è derivabile in (a, b) (se è derivabile in $[a, b]$, meglio!)

(iii) $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists \xi \in (a, b)$ t.c. $f'(\xi) = 0$.

Geometricamente è quasi ovvio. Gli ξ richiesti sono i pti a tangenza orizzontale e non sono necessariamente unici.



Dim. Gli ξ richiesti sono i pti di max e min purché rientrino tra gli stazionari interni. D'altra parte

- i pti di max e min non possono essere singolari interni per via dell'ipotesi (ii),
- se i pti di max e min fossero entrambi sul bordo, per l'ipotesi (iii) la funzione sarebbe costante, quindi avrebbe un qualunque $\xi \in (a, b)$

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f e g continue in $[a, b]$,

(ii) f e g derivabili in (a, b) .

Allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi). \quad 1^a \text{ tesi}$$

Supponiamo inoltre che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad 2^a \text{ tesi}$$

Oss. Prendo $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Allora
 $f(b) - f(a) = 1 - 1 = 0$, $g(b) - g(a) = 2$. Quindi

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0. \text{ Tuttavia non esiste nessun p.to } \xi \in (-1, 1) \text{ che verifica } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = 0. \text{ Infatti dovrebbe essere } f'(\xi) = 0, \text{ ma } f'(\xi) = 2\xi \text{ quindi } \xi = 0 \text{ ma allora anche } g'(\xi) = 3\xi^2 = 0 \text{ e viene } \frac{0}{0}$$

Quindi in questo esempio il secondo modo di scrivere la tesi non va bene (infatti non è verificata l'ipotesi (iii)).

Il primo modo di scrivere la tesi invece va bene (viene $0=0$).

Dim. Pongo $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$

Quali sono le proprietà di $\varphi(x)$?

(i) φ è continua in $[a, b]$ (combinazione lineare di funz. continue)

(ii) φ è derivabile in (a, b) (" " " ")

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$, cioè

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) &= (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) \\ f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) \end{aligned}$$

Grazie a (i), (ii), (iii) posso applicare ROLLE a $\varphi(x)$. Otteengo che esiste $\xi \in (a, b)$ t.c. $\varphi'(\xi) = 0$. Ma

$$\varphi'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$$

che è equivalente alla prima tesi.

Supponiamo ora che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora abbiamo che $g(b) \neq g(a)$. Se infatti fosse $g(b) = g(a)$ potrei applicare Rolle alla funzione $g(x)$ e avrei l'esistenza di un p.to $c \in (a, b)$ t.c. $g'(c) = 0$ che invece abbiamo supposto non esistere.

A questo p.to posso dividere e trasformare la 1ª tesi nella 2ª tesi.

— 0 — 0 —

Teorema di Lagrange Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a, b]$,

(ii) f derivabile in (a, b) .

Allora $\exists \xi \in (a, b)$ t.c. $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$.

Dim.: Uso Cauchy con $g(x) = x$. In questo modo sono verificate le ipotesi (i), (ii), (iii) di Cauchy ($g'(x) \equiv 1$). Allora per la 2ª tesi di Cauchy abbiamo che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ cioè } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1}$$

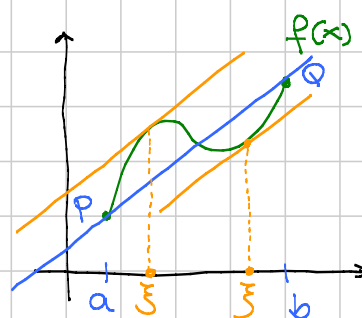
che è equivalente alla tesi di Lagrange.

Significato geometrico Scriviamo la tesi come

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

↓
coeff. angolare
retta PQ

↓
coeff. angolare retta
tangente al grafico
nel pto con. a ξ



Lagrange: $\exists \xi \in (a, b)$ in cui la retta tangente è parallela alla retta PQ.

Brutalmente: Lagrange è la versione inclinata di Rolle.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 049

Titolo nota

29/10/2011

$C \Rightarrow H$. Caso speciale $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ e forma $\frac{0}{0}$.

Dim.: Considero $f(x)$ e $g(x)$. Dalla definizione di limite non servirebbe avere $f(x)$ e $g(x)$ definite anche per $x = x_0$. Poiché la forma indeterminata è del tipo $\frac{0}{0}$, io posso definire $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ottenendo ancora funzioni continue.

Considero l'intervallo $[x_0, x]$ e lì applico Cauchy:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\uparrow$ perché $f(x_0) = g(x_0) = 0$
 $\uparrow$ Cauchy



Ad essere precisi ξ dipende da x , quindi sarebbe più corretto scrivere $\xi(x)$. In ogni caso $x_0 < \xi(x) < x$, quindi quando $x \rightarrow x_0^+$ ho che $\xi(x) \rightarrow x_0^+$ per i carabinieri. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{y \rightarrow x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

$\uparrow$ posso $y = \xi(x)$

che è proprio la tesi dell'Hôpital.

Teorema di Monotonia 2 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Allora

- 1 - Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente,
- 2 - Se $f'(x) \geq 0$ " " " " " debolmente crescente,
- 3 - Se f è strett. crescente, allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$,
- 4 - " " debolm. " " " $f'(x) \geq 0$ " " " " ".

NO bbb Questa è falsa: f strett. cresc. $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Esempio $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = x^3$. Si ha che f è strett. crescente, ma $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ e si annulla per $x=0$.

Dim.: ④ Per ipotesi f è debolmente crescente. Prendo $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ora denominatore > 0 , numeratore ≥ 0 perchè f è debolm. crescente. In ogni caso il rapporto incrementale (cioè la frazione) è ≥ 0 per ogni $h > 0$ (e anche per $h < 0$), quindi il suo limite è ≥ 0 .

Oss. Se f fosse strettamente crescente, allora la frazione sarebbe > 0 per ogni $h > 0$, ma i $>$ diventano $\geq$ quando si passa al limite.

① Ipotesi: $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Tesi: f è strett. crescente.

Prendo due p.ti qualunque c e d

in $[a, b]$ con $c < d$. Applico Lagrange

in $[c, d]$. Ottengo che

$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{>0}$$

Quindi $f(d) - f(c) > 0$, cioè $f(d) > f(c)$.

② Stessa cosa: $f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}$

Quindi $f(d) - f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$.

Esempio Dimostrare che l'equazione $2x - \arctan x = 2011$ ha un'unica soluzione reale. Dimostriamo più in generale che $f(x) = x - \arctan x$ è iniettiva e surgettiva.

La surgettività segue dall'essere $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (teo. valori intermedi).
 $f'(x) = 2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2+1}{1+x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f è strett. crescente per monotonia 2, dunque iniettiva.

Monotonia 3 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Supponiamo che

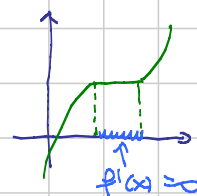
(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$,

(ii) non esiste nessun intervallo contenuto in (a, b) in cui $f'(x)$ è sempre uguale a 0 (ipotesi di annullamento SPORADICO: $f'(x)$ si può annullare, ma non in un intero intervallo).

Allora $f(x)$ è strettamente crescente in $[a, b]$.

Dim. Per l'ipotesi (i) si ha che $f(x)$ è debolmente crescente.

Se non fosse strettamente crescente, ci sarebbe un tratto piatto in un intervallo (c, d) . In tale intervallo avrei $f'(x) = 0$, il che è contro l'ipotesi (ii).



— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x - \sin x$. È surgettiva? È iniettiva?

Surgettiva SI: basta fare i limiti a $\pm \infty$ e usare tes. valori intermedi.

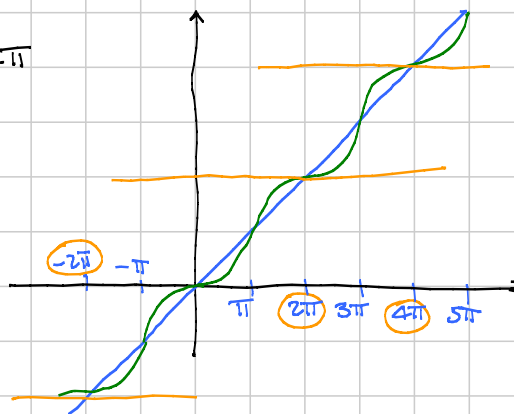
Iniettiva: $f'(x) = 1 - \cos x$, quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, cioè $f'(x)$ si annulla sporadicamente.

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ è strettamente crescente $\Rightarrow f$ è iniettiva.

I p.ti stazionari di $f(x)$ sono $x = 2k\pi$ e sono per forza p.ti di flesso a tangente orizzontale ascendente.

Inoltre $f(x) = x \Leftrightarrow \sin x = 0$
 $\Leftrightarrow x = k\pi$

$$f(x) = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

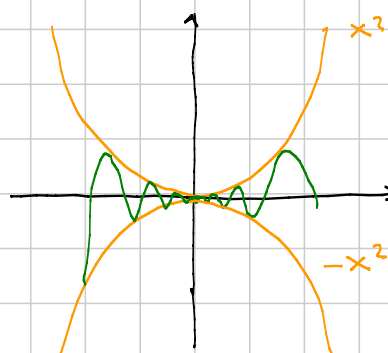


Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prima osservazione: $f(x)$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ovvio per $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ va dimostrato facendo il limite del rapp. incrementale).
Con facili conti viene $f'(0) = 0$, quindi $x = 0$ è un pto stazionario.

Seconda osservazione: $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$
e $f(x)$ ha infinite oscillazioni
quando $x \rightarrow 0$.



Osservazione successiva: pongo

$$g(x) = \frac{x}{2} + f(x)$$

Allora si dimostra che $g'(0) = \frac{1}{2}$ e che $g(x)$ non è monotona in nessun intervallo contenente l'origine (perché $g'(x)$ non ha un segno in ogni intervallo contenente l'origine).

Confrontare con monotonia 1...

— 0 — 0 —

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 050

Titolo nota

02/11/2011

Esercizio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 7n + 2}{n^{\alpha} + 4}$ Per quali valori $\alpha > 0$ converge

Brutale! $a_n \sim \frac{n^2}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 3$.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 7n + 2}{n^{\alpha} + 4} \cdot n^{\alpha-2} = \frac{n^{\alpha} + 7 \cdot n^{\alpha-1} + 2 \cdot n^{\alpha-2}}{n^{\alpha} + 4} = \frac{n^{\alpha} \left(1 + \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^{\alpha} \left(1 + \frac{4}{n^{\alpha}}\right)} \rightarrow 1$$

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$... *qui serve $\alpha > 0$*

Esercizio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)^{\alpha}$ $\alpha > 0$ (termini positivi)

Brutale: $\sqrt[n]{3} - 1 = 3^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 3} - 1 \sim \frac{1}{n} \log 3$

$a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$, quindi converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Rigoroso: C.A. con $\frac{1}{n^{\alpha}} = b_n$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \left[\frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\frac{1}{n}} \right]^{\alpha} = \left[\frac{e^{\frac{1}{n} \log 3} - 1}{\frac{1}{n}} \right]^{\alpha} \underset{x = \frac{1}{n}}{=} \left[\frac{e^{x \log 3} - 1}{x} \right]^{\alpha} = [\log 3]^{\alpha} \neq 0 \neq +\infty$$

Esercizio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\cos \frac{1}{n} + 1\right)^{\alpha}$ $\alpha > 0$ termini positivi

Brutale: $1 - \cos \frac{1}{n} \sim 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$
 $\uparrow$
 $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow 0$

Quindi $\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{1}{2n^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}}$ converge $\Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 + n^3 + 3}{n^6 + n^\alpha + 5}$ Termini positivi

Brutale: Numeratore $\sim n^5$. Denominatore $\sim \begin{cases} n^6 & \text{se } \alpha \leq 6 \\ n^\alpha & \text{se } \alpha > 6 \end{cases}$

Quindi frazione $\sim \begin{cases} \frac{n^5}{n^6} & \text{se } \alpha \leq 6 \\ \frac{n^5}{n^\alpha} & \text{se } \alpha > 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{1}{n} \text{ quindi diverge} \\ \frac{1}{n^{\alpha-5}} \text{ quindi converge } (\Leftrightarrow \alpha-5 > 1) \\ \Leftrightarrow \alpha > 6 \end{matrix}$

Rigoroso: distinguo 2 casi

* se $\alpha \leq 6$ confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ FARE!
 * se $\alpha > 6$ " " " $b_n = \frac{1}{n^{\alpha-5}}$ LIMITI!

Esercizio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 + n^3 + 3}{n^7 + n^\alpha + 5}$ Termini positivi

$$\frac{n^5 + n^3 + 3}{n^7 + n^\alpha + 5} \leq \frac{n^5 + n^3 + 3}{n^7} \quad \left(\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{converge} \right)$$

denominatore
più piccolo

Quindi converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

Volevo potersi distinguere i 2 casi:

* se $\alpha \leq 7$ Frazione $\sim \frac{n^5}{n^7} = \frac{1}{n^2}$ che converge

* se $\alpha > 7$ Frazione $\sim \frac{n^5}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-5}}$ che converge $\Leftrightarrow \alpha > 6$, cioè sempre in questo caso.

Esercizio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{n^2 + \alpha^n}$ $\alpha > 0$ termini positivi

Brutale: $a_n \sim \frac{2^n}{\alpha^n}$ (per lo meno se $\alpha > 1$) $= \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n$ che è una geometrica che converge $\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} < 1$, cioè $\Leftrightarrow \alpha > 2$.
 Se invece $\alpha \leq 1$, allora $a_n \sim \frac{2^n}{n^2}$ che diverge (manca la condizione necessaria)

Rigoroso: per $\alpha \leq 1$ manca la condizione necessaria
 per $\alpha > 1$ si può fare il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \left[\frac{2^n + n^3}{n^2 + 2^n} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{2^n}{2^n} \cdot \frac{1 + \frac{n^3}{2^3}}{1 + \frac{n^2}{2^n}} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1 + \frac{n^3}{2^3}}{1 + \frac{n^2}{2^n}} \right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{2} \cdot 1^0 = \frac{2}{2}$$

$\frac{2}{2}$ (from $\frac{2^n}{2^n}$)
 $\frac{1}{2}$ (from $\frac{1}{2^n}$)
 $\frac{n^3}{2^3}$ (from $\frac{n^3}{2^3}$)
 $\frac{n^2}{2^n}$ (from $\frac{n^2}{2^n}$)
 vero perché $\alpha > 1$

Questo dice che $\rightarrow$ se $\frac{2}{2} > 1$, cioè $\alpha < 2$ la serie diverge

$\rightarrow$ se $\frac{2}{2} < 1$, cioè $\alpha > 2$ la serie converge

Resta scoperto $\alpha = 2$, che "va fatto a mano":

$\sum \frac{2^n + n^3}{n^2 + 2^n}$ e questa diverge perché $a_n \rightarrow 1$, quindi manca la condizione necessaria.

Esercizio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \alpha^n$ per $\alpha > 0$

Questa in realtà è una serie di potenze con coeff. $a_n = n!$, quindi calcolo il raggio di convergenza:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n!} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1. \text{ Quindi}$$

* converge per $|\alpha| < 1$

* non converge per $|\alpha| > 1$

* per $\alpha = \pm 1$ per verifica diretta manca la condizione necessaria, quindi non converge. Quindi converge $\Leftrightarrow |\alpha| < 1$.

Esercizio 8 $\sum_{n=0}^{\infty} n! \alpha^{n^2}$ $\alpha > 0$ È una serie di potenze, ma i coeff. sono 0 ogni volta che l'esponente non è un $\square$ perfetto.

$$a_n = n! \alpha^{n^2}. \text{ Criterio della radice: } \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n!} \cdot \alpha^{\frac{n}{2}} = b_n$$

$\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$
 $\alpha^{\frac{n}{2}} \rightarrow 0$ se $\alpha < 1$

Studio b_n usando ancora la radice:

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}} \cdot \alpha = \sqrt[n]{\frac{n!}{n}} \cdot \alpha \rightarrow \left[\frac{1}{e} \right]^0 \cdot 1 \cdot \alpha = \alpha. \text{ Se } \alpha < 1, \text{ allora}$$

$\frac{n!}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$
 $\sqrt[n]{\frac{n!}{n}} \rightarrow 1$
 $b_n \rightarrow 0$, quindi $\sum a_n$ converge.
 criterio radice per

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 051

Titolo nota

02/11/2011

Esercizio 1 $2^n - n^3 - \sinh n$ < 0 definitivamente (Vero o Falso?)
 VERO! a_n

Se dimostro che $a_n \rightarrow -\infty$, ne segue che $a_n < 0$ definitivamente

$$a_n = 2^n - n^3 - \frac{e^n - e^{-n}}{2} = \underbrace{e^n}_{+\infty} \left\{ \underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^n}_0 - \underbrace{\frac{n^3}{e^n}}_0 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{e^{-2n}}{2}}_0 \right\} \rightarrow +\infty \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty$$

Oss. Bastava dimostrare che $a_n \rightarrow \ell < 0$ per dedurre $a_n < 0$ definit.

Esercizio 2 $\arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$ < 0 definitivamente
 a_n

Ora $a_n \rightarrow \arctan 0 - \sin 0 = 0$, quindi non posso dire nulla (per ora) sul segno di a_n .

Brutale: $a_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sim 0$ Troppo brutale!!

Vado all'ordine 3: $a_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} \right)$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{3n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6n^3} = -\frac{1}{6n^3} < 0$$

Rigoroso: confronto con $\frac{1}{n^3}$ (asintoticamente)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} =$$

$x = \frac{1}{n}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right\} = -\frac{1}{6}$$

Se $\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} \rightarrow -\frac{1}{6}$, allora definitivamente $\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} < 0$, quindi definit.

$a_n < 0$ (il denom. è > 0).

Esercizio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$ termini negativi definitivamente

Porto il segno - fuori: $-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$

Ora basta fare il conf. asintotico con $b_n = \frac{1}{n^3}$ e $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{6} \neq 0 \dots$

Esercizio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right|^{\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}$ ($\sim \frac{1}{n^{3\alpha}}$)

Esercizio 5 Consideriamo $f(x) = \log(1 + \sin x^3)$.
Calcolare $f^{(3)}(0)$ e $f^{(2011)}(0)$

Le derivate successive, calcolate in $x=0$, compaiono nel polinomio di Taylor davanti alle opportune potenze di x .
Calcolo il polinomio di grado 6:

$$\sin x^3 = x^3 + o(x^6) \quad (\text{in realtà anche } \sin x^3 = x^3 + o(x^8))$$

Ora

$$\begin{aligned} \log(1 + \sin x^3) &= \log(1 + \underbrace{x^3 + o(x^6)}_{t}) = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + o((x^3 + o(x^6))^2) \\ \log(1+t) &= t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

D'altra parte

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6)$$

↑
Formula generale per i polinomi di Taylor

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$$

Quindi delle prime 6 derivate quelle non nulle sono la 3^a e la 6^a.

In particolare:

$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 1 \quad (\text{coeff. di } x^3) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 3! = 6$$

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{2} \quad (\text{coeff. di } x^6) \Rightarrow f^{(6)}(0) = -\frac{1}{2}6! = -360$$

Ora basta osservare che nello sviluppo compaiono solo esponenti multipli

di 3, quindi $\frac{f^{(2011)}(0)}{2011!} = 0$ (2011 non è multiplo di 3) $\Rightarrow f^{(2011)}(0) = 0$.

Calcoliamo anche il polinomio di grado 3

$$\sin x^3 = x^3 - \frac{1}{6} x^9 + o(x^{14}), \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} \log(1 + \sin x^3) &= \log\left(1 + x^3 - \frac{1}{6} x^9 + o(x^{14})\right) = \underbrace{x^3 - \frac{1}{6} x^9}_t - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{3} x^9 + o(x^9) \\ &\quad \log(1+t) \\ &= x^3 - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{6} x^9 + o(x^9) \end{aligned}$$

Al posto di $o(x^9)$ potrei mettere $o(x^{11})$: il termine successivo sarebbe $+\frac{1}{6} x^{12}$ e verrebbe fuso col doppio prodotto durante il calcolo di $\frac{1}{2} t^2$.
N.B.: un termine con x^{12} viene fuso anche facendo t^4 ...

Esercizio 6 Consideriamo $f(x) = x^7 + \arctan x^3 - \sin x^6$.

È surgettiva? È iniettiva? Cosa possiamo dire di $f(x) = 0$?

SURGETTIVA: sì perché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

In mezzo è continua (non ci sono problemi burocratici).

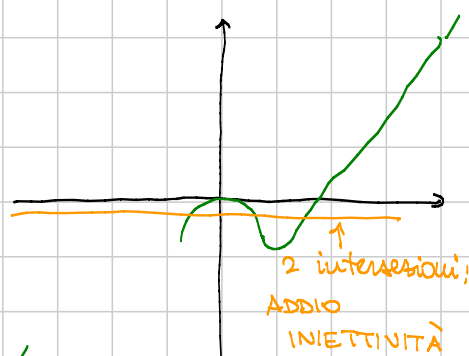
Speranza per l'iniettività: calcolo $f'(x)$, spero che $f'(x) > 0$ ($0 \geq 0$ con annullamento sporadico) e poi monotona $\Rightarrow$ iniettiva.

Provo invece lo studio locale in $x=0$:

$f(x) = -x^6 + o(x^6)$ quindi vicino all'origine si comporta come $-x^6$, dunque ha un massimo locale

L'equazione $f(x) = 0$ ha come soluz.

$x=0$ e ALMENO un'altra soluzione positiva.



Per esercizio calcolate $f^{(6)}(0)$ e $f^{(2011)}(0)$.

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 052

Titolo nota

03/11/2011

Studio globale di funzioni. Tracciare il grafico di una funzione $f(x)$ in tutto l'insieme in cui è definita.

Esempio 1 $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

Simmetrie: f è PARI: $f(x) = f(-x)$

Insieme di definizione e continuità: $f(x)$ è definita per ogni $x \neq \pm 1$, e in tale insieme è continua.

Limiti agli estremi della zona di definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{+}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{+}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \left[\frac{+}{0^-} \right]$$

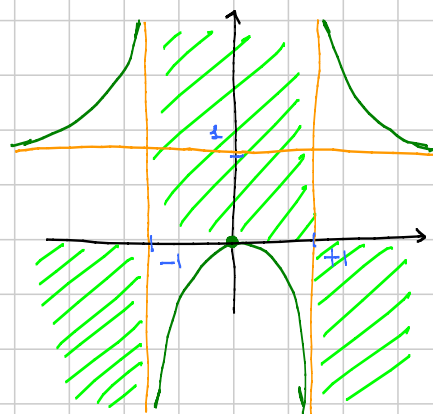
(I limiti della 2ª riga seguono da quelli della 1ª perché $f(x)$ è pari)

Primo tentativo di grafico

Zeri e segno: risolvere $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$



Per ora nessuno può escludere un grafico del tipo

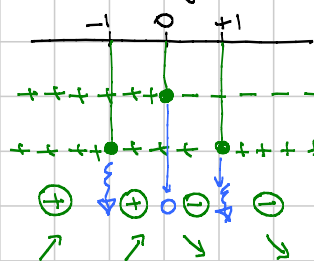


Studio della derivata (dove esiste? che segno ha?)

$f(x)$ è derivabile per ogni $x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x \cdot x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Studio il segno: risolvo $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$



Numeratore: $-2x$

Denominatore: $(x^2-1)^2$

$f'(x)$

$f(x)$

Quindi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Questo conferma la 1ª versione del grafico. Volevo questo dire che il limite a $\pm\infty$ era $\pm$ anche se uno non si era accorto prima del +.

Asintoti → orizzontali

→ verticali

→ obliqui

Orizzontali Una retta $y = l$ è asintoto orizz. di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. Stesso discorso per $x \rightarrow -\infty$.

Nell'esempio la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale sia per $x \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$.

Verticali Una retta $x = a$ è asintoto verticale per $f(x)$ se succede una di queste 4 possibilità:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$$

Nell'esempio le rette $x = 1$ e $x = -1$ sono asintoti verticali per $f(x)$

Achtung! Non è obbligatorio che i pti in cui ci sono problemi di definizione corrispondano ad asintoti verticali.

Obliqui Una retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(f(x) - mx - n)}_{\substack{\text{distanza tra funzione} \\ \text{e retta}}} = 0$$

Discorso analogo per $x \rightarrow -\infty$.



Oss. Gli asintoti orizzontali sono in realtà asintoti obliqui con $m=0$.

Domanda: come riconoscere la presenza di un asintoto obliquo e calcolarne i coeff. m ed n ?

Si usano queste formule ($+\infty$, ma sono analoghe a $-\infty$)

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

dato dal limite precedente

Oss. Se $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, allora il limite che definisce m è una forma del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, quindi si può provare con l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

Questo funziona solo se il limite di $f'(x)$ esiste.

Dim. Supponiamo che $y = mx + n$ sia asintoto per $x \rightarrow +\infty$. Allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - n + mx + n}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x) - mx - n}{x} + \frac{mx + n}{x} \right] = m \end{aligned}$$

$\downarrow$
 $\left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{f(x) - mx - n}_{0} + n \right) = n$$

Ho dim. che, se esiste l'asint. obliquo, m ed n sono dati dalla formula

Viceversa, se esistono e sono reali i numeri m ed n dati dalla formula, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(f(x) - mx - n)}_{\substack{|| \\ n - n}} = 0$$

cioè la retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo.

Esempio $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1}$

Vediamo se c'è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Calcolo

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} = 3$$

Quindi la retta $y = x + 3$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

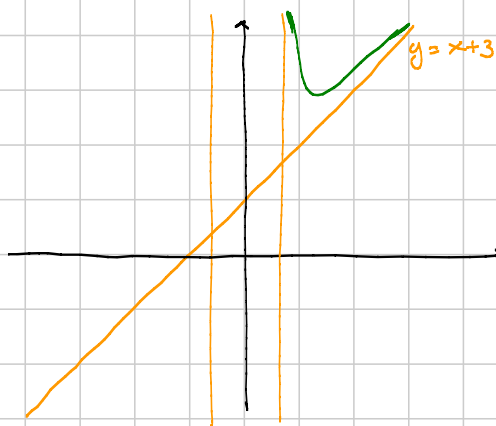
La stessa retta è pure asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

Come capire se arriva dall'alto o

dal basso: basta studiare

la differenza $f(x) - x - 3$ e

capire se tende a 0^+ oppure a 0^-
per $x \rightarrow \pm\infty$ (esercizio!).



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 053

Titolo nota

03/11/2011

Esempio 1 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1}$

Visto prima:

 $x = \pm 1$ asintoti verticali $x = x+3$ asintoto obliquo a $+\infty$ e a $-\infty$.

$$f(x) - x - 3 = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} - x - 3 = \frac{x^3 + 3x^2 - x^3 - 3x^2 + x + 3}{x^2 - 1} = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 3 = 0^+ \quad (\text{numeratore e denomin. } > 0 \text{ per } x \text{ grande})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x - 3 = 0^- \quad (\text{num. } < 0 \text{ e denom. } > 0 \text{ per } x \text{ molto neg.})$$

Volevo fare il grafico:

→ Simmetrie: nulla

→ Definita e continua per $x \neq \pm 1$

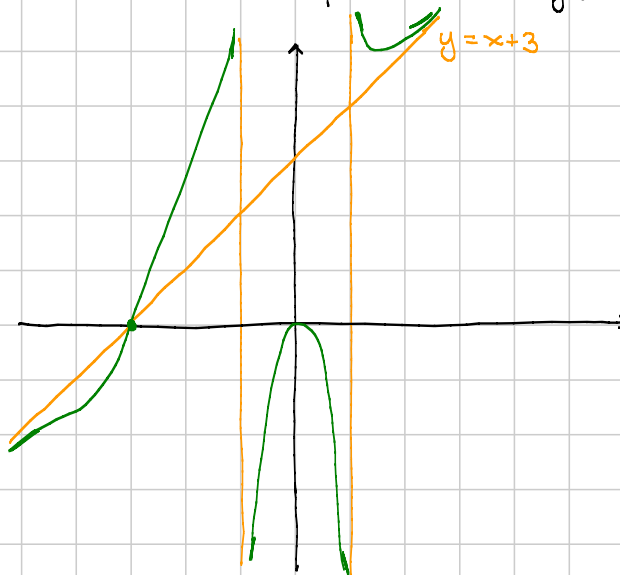
→ Limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$



Esaminando il tratto per $x \in (-\infty, -1)$ deduco che ci deve essere un attraversamento dell'asintoto, cioè un p.to in cui $f(x) - x - 3 = 0$.

Ma già sappiamo che $f(x) - x - 3 = \frac{x+3}{x^2-1}$, quindi $x = -3$

Per avere una conferma bisogna controllare il segno della derivata.

Esempio 2 Risolvere l'equazione $x + 2\sin x = 0$
 $f(x)$

Intanto c'è la soluzione $x = 0$.

Non ci sono soluzioni se $x > 2$ oppure $x < -2$ (perché $f(x) > 0$ per ogni $x > 2$ e $f(x) < 0$ per ogni $x < -2$).

Quindi mi limito a studiare $f(x)$ per $x \in [-2, 2]$, oppure $x \in [-\pi, \pi]$

→ funzione dispari, definita e continua in tutto $[-\pi, \pi]$.

→ valori agli estremi dell'intervallo: $f(\pi) = \pi$, $f(-\pi) = -\pi$

→ Zeri e segno: non li so fare

→ Studio la monotonia (limito a $[-\pi, \pi]$)

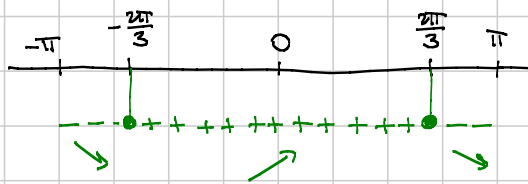
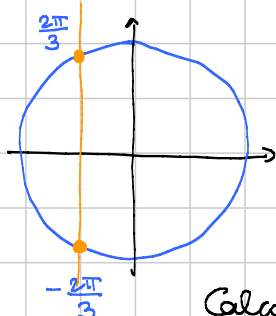
$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \quad x = -\frac{2\pi}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

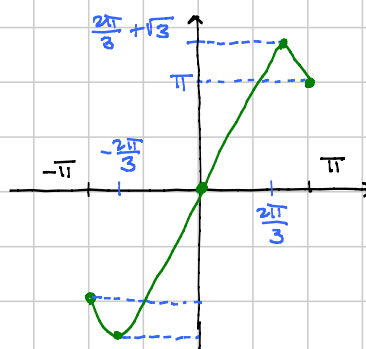
$$x \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$



Calcolo $f\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{2\pi}{3} + 2\sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$



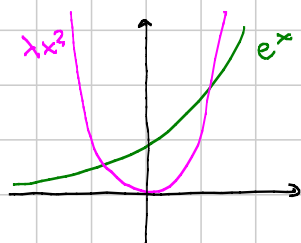
Conclusioni: dopo aver studiato il segno di $f'(x)$ conosco il grafico di $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ e posso rispondere alla domanda su zeri e segno. Quindi $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

— 0 — 0 —

Esempio 3 Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

Prima idea:



Ci sono 2 soluzioni

Seconda idea: la prima è corretta per $\lambda > 0$, mentre per $\lambda \leq 0$ la parabola è verso il basso e non ci sono soluzioni

Quindi: $\rightarrow 0$ soluzioni per $\lambda \leq 0$
 $\rightarrow 2$ soluzioni per $\lambda > 0$.

Achtung! Sovrapporre 2 grafici è MOLTO PERICOLOSO!!

Idea corretta: trasformare il problema in $f(x) = \lambda$ per una opportuna $f(x)$.

Dividendo per x^2 ottengo

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

(oss.: posso dividere per x perché $x=0$ non è mai soluzione, quindi non la posso perdere dividendo).

Studio $f(x)$.

$\rightarrow$ Nessuna simmetria

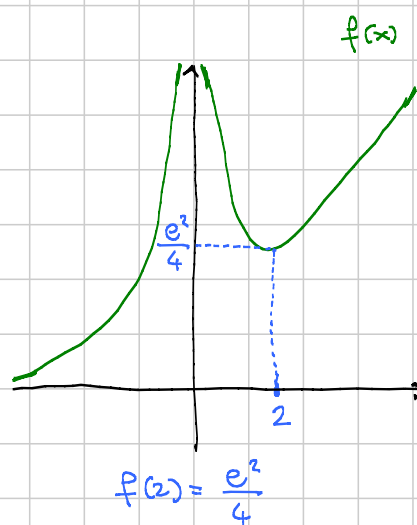
$\rightarrow$ Definita e continua per ogni $x \neq 0$

$\rightarrow$ limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{0^+}{+\infty} \right] = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

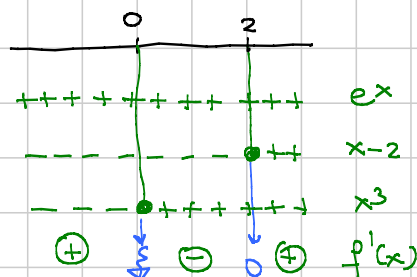


$$f'(x) = \left[\frac{e^x}{x^2} \right]' = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = e^x \frac{x^2 - 2x}{x^4} = e^x \frac{x(x-2)}{x^4} = e^x \frac{x-2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$$



Questo conferma il grafico e dice che l'eq. $e^x = \lambda x^2$ ha

- 0 soluzioni per $\lambda \leq 0$
- 1 soluzione per $\lambda \in (0, \frac{e^2}{4})$
- 2 soluzioni per $\lambda = \frac{e^2}{4}$
- 3 soluzioni per $\lambda > \frac{e^2}{4}$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 054

Titolo nota

04/11/2011

Formula di Taylor con resto di Lagrange Caso con centro in $x_0 = 0$

$$f(x) = \boxed{P_n(x)} + \boxed{o(x^n)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$\downarrow$ polinomio di grado $\leq n$ $\downarrow$ resto in forma di o piccolo (resto di PEANO)

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}} \quad \text{dove } \xi \text{ sta tra } 0 \text{ e } x$$

$\downarrow$ resto scritto alla LAGRANGE

In maniera estesa:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Se il centro è in un p.to x_0 generico, allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dove ξ è un opportuno p.to che sta tra x_0 e x

Oss. Nel caso $n=0$ la formula diventa $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$,
 cioè $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$, che è il teorema di Lagrange.

Dim.: facciamo il caso $x_0 = 0$. Possiamo

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Dobbiamo dimostrare che $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, cioè

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Chiamo $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Cosa posso dire delle derivate di $\varphi(x)$ calcolate in 0? Vediamo per $P_n(x)$

$$P_n(0) = f(0), \quad P_n'(0) = f'(0), \quad P_n''(0) = f''(0), \quad \text{e in generale}$$

$$P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n.$$

Inoltre $P_n^{(n+1)}(0) = 0$, e anzi $P_n^{(n+1)}(x) = 0$ perché il polinomio ha grado $\leq n$.

Di conseguenza

$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n$$

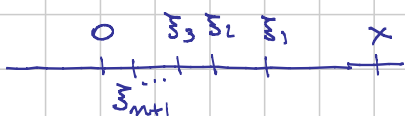
$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

Cosa possiamo dire della derivata k -esima di x^{n+1} . Si ha che

$$\frac{d^k(x^{n+1})}{dx^k}(0) = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n \text{ e}$$

$$\frac{d^{n+1}(x^{n+1})}{dx^{n+1}}(x) = (n+1)! \quad \text{per ogni } x.$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} &= \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} \stackrel{\text{Cauchy 1}}{=} \frac{\varphi'(\xi_1)}{(n+1)\xi_1^n} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(0)}{(n+1)\xi_1^n - (n+1)0^n} \stackrel{\text{Cauchy 2}}{=} \\ &= \frac{\varphi''(\xi_2)}{(n+1) \cdot n \cdot \xi_2^{n-1}} = \frac{\varphi''(\xi_2) - \varphi''(0)}{(n+1) \cdot n \cdot \xi_2^{n-1} - (n+1) \cdot n \cdot 0^{n-1}} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \end{aligned}$$



— 0 — 0 —

Applicazioni: $\rightarrow$ Calcolo di valori approssimati
 $\rightarrow$ Dimostrazione di disuguaglianze.

Esempio 1 Calcolare approssimativamente $\sin \frac{1}{10}$.

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{f^{(*)}(\xi)}{7!}x^7$$

Taylor Lagrange per $\sin x$
 con $n = 6$

Quindi uso la formula con $x = \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{10} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10^3} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{10^5} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} \cdot \frac{1}{10^7} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12.000.000} + \text{resto} \\ &= \frac{1.200.000 - 2.000 + 1}{12.000.000} + \text{resto} \\ &= \frac{1.198.001}{12.000.000} + \text{resto}\end{aligned}$$

Se dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{1.198.001}{12.000.000}$ commetto un errore che è

$$\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} \cdot \frac{1}{10^7} \quad \text{quindi } |\text{errore}| \leq \frac{|f^{(7)}(\xi)|}{7!} \cdot \frac{1}{10^7} \leq \frac{1}{5.040 \cdot 10^7}$$

$f^{(7)}$ è $\sin$ o $\cos$

Riprova: $\frac{1.198.001}{12.000.000} = 0,099833416 \quad \sin \frac{1}{10} = 0,099833416$

Esempio 2 Stessa cosa formulando con termine prima:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \quad \sin \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot \frac{1}{10^5}$$

$\frac{599}{6000}$

Se dico $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$ commetto un errore tale che

$$|\text{errore}| = \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!} \cdot \frac{1}{10^5} \leq \frac{1}{12.000.000}$$

Riprova $\frac{599}{6000} = 0,099833\boxed{3}$

↑ errore di 1 sulla 7ª cifra decimale.

Esempio 3 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con uguaglianza se e solo se $x=0$.

Taylor Lagrange con $n=1$: $e^x = 1+x + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}x^2 = 1+x + \frac{e^\xi}{2}x^2 \geq 1+x$

$\frac{e^\xi}{2}x^2 \geq 0$ sempre
 $e=0 \Leftrightarrow x=0$

Esempio 4 Dimostrare che $\arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$

Modo 1 Taylor-Lagrange con $n=1$

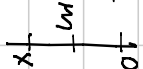
$$\arctan x = x + \frac{f''(\xi)}{2} x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ quindi}$$

$$\arctan x = x - \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} x^2$$

Se $x=0$ c'è uguaglianza. Se $x>0$, allora $\xi>0$, dunque

$$\arctan x = x - \text{roba positiva} < x$$

Se $x<0$, allora $\xi<0$ , dunque

$$\arctan x = x - \text{roba negativa} > x$$

Modo 2 Studio la funzione $f(x) = x - \arctan x$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

con uguaglianza se e solo se $x=0$. Quindi

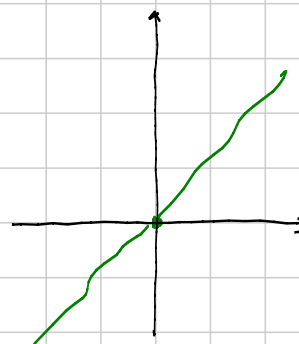
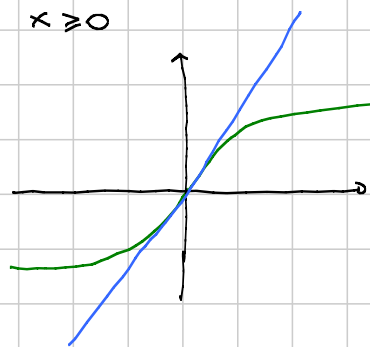
$f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento sporadico.

Monotonia $\Rightarrow f$ è strett. crescente,

quindi

$f(x) > 0$ per $x > 0$, cioè $x > \arctan x$ per $x > 0$

$f(x) < 0$ per $x < 0$, cioè $x < \arctan x$ per $x < 0$.



ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 055

Titolo nota

04/11/2011

Convessità Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se, per ogni coppia di p.ti a, b in A si ha che tutto l'intervallo $[a, b] \subseteq A$.

Quali sono i sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ che sono convessi? Sono di 3 tipi:

- * $A = \mathbb{R}$
- * le semirette $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$
- * gli intervalli, con o senza estremi $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) .

Def. (geometrica) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se, per ogni coppia di p.ti P e Q del grafico, si ha che tutto il segmento PQ sta "sopra" il grafico. Si dice concava se il segmento sta sempre "sotto" il grafico.

Esempi $f(x) = x^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$

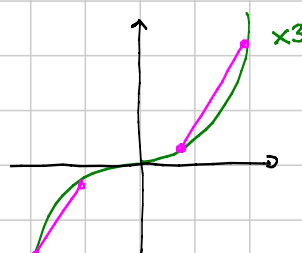
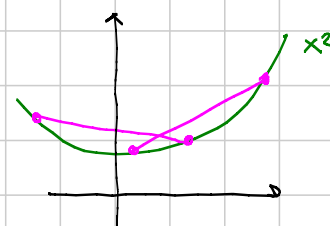
$f(x) = x^3$ è convessa in $[0, +\infty)$

è concava in $(-\infty, 0]$

$f(x) = \arctan x$ è concava in $[0, +\infty)$

è convessa in $(-\infty, 0]$

$f(x) = |x|$ è convessa ovunque



Oss. Quella che abbiamo definito si potrebbe chiamare funzione debolmente convessa (il segmento PQ può coincidere con un tratto di grafico).

La funzione si dice strettamente convessa se il segmento sta sempre strettamente sopra il grafico, tranne negli estremi.

Così $f(x) = |x|$ è convessa, ma non strettamente convessa.

Def (algebraica) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B, \forall \lambda \in [0,1]$$

Collegamento tra le 2 definizioni. Siano $a \in A, b \in B, \lambda \in [0,1]$.

Cosa rappresenta $\lambda a + (1-\lambda)b$? $\lambda=0 \rightsquigarrow b$

$$\lambda=1 \rightsquigarrow a$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{a+b}{2}$$

L'espressione $\lambda a + (1-\lambda)b$ rappresenta, al variare di $\lambda \in [0,1]$, tutti i pti dell'intervallo $[a,b]$

La convessità dice che

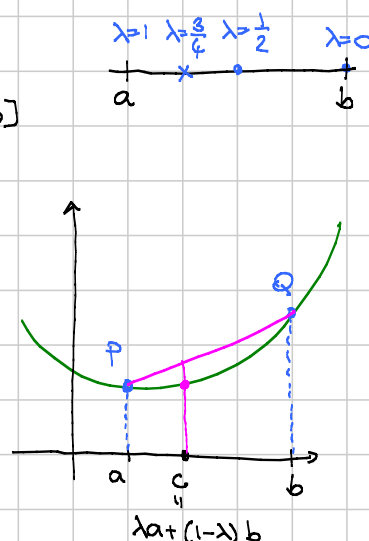
$$f(c) \leq \text{eq. della retta calcolata in } c$$

Scrivendo l'equazione della retta per a e calcolando il suo valore per $x=c$ si ottiene

$$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Quindi

$$\underbrace{f(\lambda a + (1-\lambda)b)}_{\text{valore di } f \text{ in } c} = \underbrace{\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)}_{\text{valore della retta in } c.}$$



Oss. Una funzione convessa non è obbligata ad essere derivabile ovunque (ad esempio $f(x) = |x|$ è convessa, ma $f'(0)$ non esiste).

Convessità e derivata seconda Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $f''(x)$ esista per ogni $x \in A$. Allora

(1) $f''(x) > 0$ per ogni $x \in A \Rightarrow f$ strettamente convessa

(2) $f''(x) \geq 0$ " " $\Rightarrow f$ (debolmente) convessa

(3) f strett. convessa $\Rightarrow f''(x) > 0$ per ogni $x \in A$ **FALSA**

(4) f (debolmente) convessa $\Rightarrow f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$.

Esempio $f(x) = x^4$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$, ma $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, ma si annulla per $x=0$

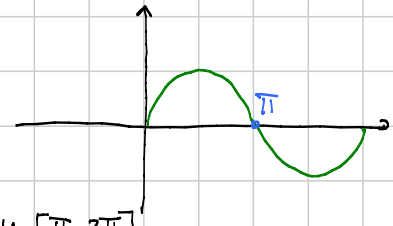
Operativamente: le zone di concavità / convessità si possono studiare esaminando il segno di $f''(x)$ (se questa esiste).

Esempio 1 $f(x) = \sin x$ Sembra che

* concava in $[0, \pi]$

* convessa in $[\pi, 2\pi]$

Infatti $f''(x) = -\sin x$ è ≤ 0 in $[0, \pi]$ e ≥ 0 in $[\pi, 2\pi]$



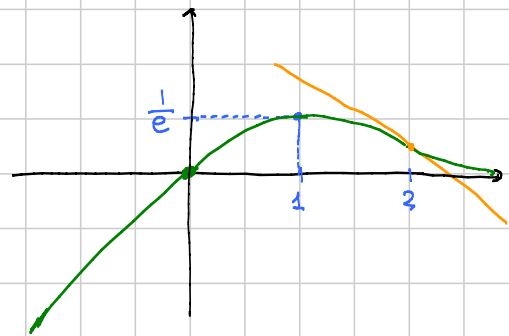
Esempio 2 $f(x) = x e^{-x}$

Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, senza particolari simmetrie.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

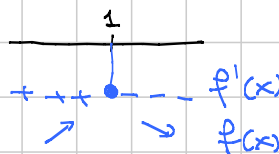


$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x} (1-x)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

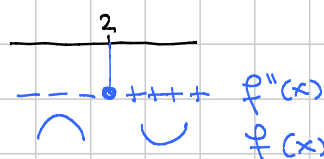


$$f''(x) = -e^{-x} (1-x) - e^{-x} = e^{-x} (-1+x-1) = e^{-x} (x-2)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$



Oss. geometrica Per le funzioni concave il grafico sta sopra le rette tangenti.

Per le funzioni convexe il grafico sta sotto le rette tangenti.

Nei p.ti di passaggio da convessa a concava il grafico sta sopra da una parte e sotto dall'altra, quindi il grafico "attraversa" la retta tangente (p.ti di FLESSO)

Achtung! Dove $f''(x)=0$ non è detto che ci sia un p.to di flesso (con attraversamento). Pensare a $f(x)=x^4$ con $f''(x)=12x^2$ che si annulla per $x=0$, che è p.to di minimo.

— 0 — 0 —

Disuguaglianze classiche

$$\sin x \leq x \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

$$e^x \geq 1+x \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

In tutti i casi vale il segno di uguale $\Leftrightarrow x=0$

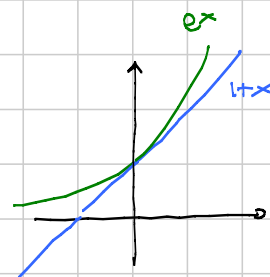
Queste si dimostrano tutte studiando la monotonia di una funzione opportuna: $x - \sin x$, $e^x - 1 - x$, $x - \arctan x$, $x - \log(1+x)$

Nel caso di e^x si possono fare 3 dimostrazioni:

(1) Studio di $e^x - 1 - x$

(2) Taylor-Lagrange

(3) Osservare che $y = x+1$ è la retta tangente al grafico in $x=0$, e $f(x)=e^x$ è convessa, dunque sta sopra la tangente



Esercizio Trovare una disug. per $\cos x$ $\left[\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \geq 0 \right]$

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 056

Titolo nota

04/11/2011

LIPSCHITZIANITÀ

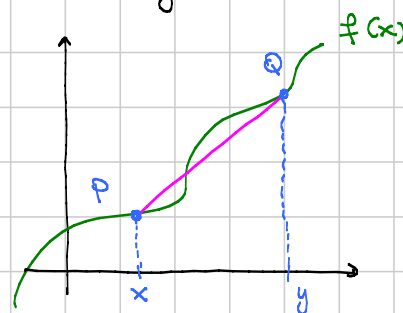
Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è Lipschitziana in A se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x \in A, \forall y \in A.$$

La più piccola costante L che fa funzionare la definizione si dice costante di Lipschitz di $f(x)$ in A .

Significato geometrico Se $x \neq y$ posso riscrivere la disug. come

$$\underbrace{\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|}_{\text{coeff. angolare retta } PQ} \leq L$$



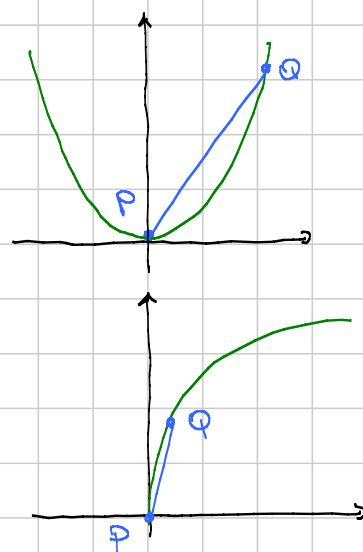
Quindi $f(x)$ è lip. se e solo se tutte le rette che congiungono 2 pti del grafico hanno pendenza (cioè coeff. angolare) in $[-L, L]$, cioè il grafico ha "pendenza limitata"

Intuitivamente: $f(x) = x^2$ è lip. in $\mathbb{R}$? NO! basta prendere l'origine ed un p.to "molto grande" per avere rette di pendenza enorme

$f(x) = x^2$ è lip. in $[0, 1]$? SÌ! Lì le pendenze sono limitate.

$f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[0, 1]$? NO! Prendo P nell'origine e Q molto vicino a 0.

$f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[1, +\infty)$? SÌ! Ormai il grafico ha "spianato".



Legami tra Lipschitzianità e derivata prima.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso (retta, semiretta, intervallo), e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Allora f è lip. in $A \Leftrightarrow |f'(x)|$ è limitata in A

Inoltre la costante di Lipschitz di $f(x)$ in A è data dalla formula $\sup \{ |f'(x)| : x \in A \}$.

Dim. $\Leftarrow$ Ipotesi: $|f'(x)|$ è limitata in A , cioè esiste $M \in \mathbb{R} \neq c$.
 $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$.

Terzi: $f(x)$ è lip. in A .

$$|f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\text{Lagrange}} \cdot |x - y| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\text{ipotesi}} \cdot |x - y| \leq M \cdot |x - y|$$

Questo mostra la disuguaglianza richiesta con $L = M$.

$\Rightarrow$ Ipotesi: $f(x)$ è lip. in A

Terzi: $f'(x)$ è limitata in A .

Prendo $x_0 \in A$. Allora

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L|h|}{|h|} = L$$

ho usato che
 $|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq L|(x_0+h) - x_0|$

leggermente più delicato è dimostrare che la costante di lip. è proprio il sup di $|f'(x)|$ (esercizio medium).

Esempio 1 $f(x) = x^2$ $A = \mathbb{R}$ $\sup \{ |f'(x)| : x \in A \} = \sup \{ |2x| : x \in \mathbb{R} \} = +\infty$
 e quindi $f(x)$ NON è Lipschitziana in $\mathbb{R}$

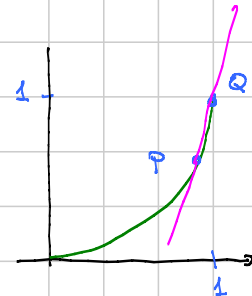
$f(x) = x^2$ $A = [0, 1]$ $\sup \{ |f'(x)| : x \in A \} = \sup \{ |2x| : x \in [0, 1] \} = 2$
 $\Rightarrow f(x)$ è lip. con costante 2 in $[0, 1]$.

Conseguenza: $|x^2 - y^2| \leq 2|x - y| \quad \forall x \in [0,1], \forall y \in [0,1]$

Si poteva anche dimostrare osservando che

$$|x^2 - y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 2 \text{ perché } x \text{ e } y \text{ sono in } [0,1]} \cdot |x-y| \leq 2|x-y|.$$

Se voglio avvicinarmi alla pendenza massima 2, devo prendere x e y vicini ad 1.



Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$, $A = [1, +\infty)$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in [1, +\infty) \} = \sup \{ \frac{1}{2\sqrt{x}} : x \in [1, +\infty) \} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\sqrt{x}$ è lip. in $[1, +\infty)$ con costante $\frac{1}{2}$, cioè

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2} |x - y| \quad \forall x \geq 1, \forall y \geq 1.$$

se voglio $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ + grande pos. devo prendere x + piccolo possibile, cioè $x=1$

La stessa cosa si poteva dimostrare per via elementare osservando che

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}| = |x - y| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

$\leq \frac{1}{2}$ (denominatore più piccolo possibile).

Esempio 3 $\sin x$ e $\cos x$ sono lip. in $\mathbb{R}$? Sì

$$\text{Prendiamo } f(x) = \sin x : \sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ |\cos x| : x \in \mathbb{R} \} = 1$$

Discorso analogo per $\cos x$

Esempio 4 $f(x) = \arctan x$ è lip. in $\mathbb{R}$? Sì, con costante 1

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \} = 1$$

Disuguaglianze classiche di Lipschitzianità

$$\begin{array}{ll}
 |\sin x - \sin y| \leq |x - y| & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \\
 |\cos x - \cos y| \leq |x - y| & " \quad " \\
 |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y| & " \quad "
 \end{array}$$

Seguono banalmente dal fatto che $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$ sono Lip. in $\mathbb{R}$ con costante 1.

Esempio 5 $f(x) = \sin x^2$ è Lip. in $[0, 127]$?

$\sup \{ |f'(x)| : x \in [0, 127] \}$ Questo viene per forza un numero reale (e non $+\infty$) perché è il max di una funzione continua su un intervallo con estremi compatti (Weierstrass).

E su tutto $\mathbb{R}$? Non Lipschitziana

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ |2x \cdot \cos(x^2)| : x \in \mathbb{R} \} = +\infty$$

↑
posso prendere x molto grande con $\cos(x^2) \approx 1$

