

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 103 ☺

Titolo nota

29/01/2011

Ogrande Ripartiamo da o piccolo

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0 \text{ se}$$

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Ogrande

Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se

$$f(x) = g(x) w(x) \text{ con } w(x) \text{ limitata in un intorno di } x_0$$

asintoticamente equiv.

Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se ... con $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$

Esempi Brutalmente: $O(x^3)$ raccoglie tutte le potenze di x con esponente > 3

$O(x^3)$ raccoglie tutte le potenze di x con esponente ≥ 3

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^3)$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^4)$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^5) \text{ potenze con esponente } \geq 5$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^5) \text{ FALSA}$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^3) \text{ VERA ma buffa perché } O(x^3) \text{ assorbe anche } x^3$$

Oss. Quando posso dividere, dire che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

il che equivale a dire che $f(x)$ e $g(x)$ sono perfettamente equivalenti. Ad esempio $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$.

Definizione Se $f(x) \sim \alpha x^a$ per $x \rightarrow 0$ si dice che $f(x)$ è un infinitesimo (si pensa $a > 0$) di ordine a e ha parte principale αx^a

Esempio $f(x) = e^{2x} - 1 - 2\arctan x$.

Determinare ordine di infinitesimo e parte principale.

Sostanzialmente si tratta di determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor

$$f(x) = \cancel{1} + \cancel{2x} + \frac{4x^2}{2} - \cancel{1} - \cancel{2x} + o(x^2) = \boxed{2x^2} + o(x^2)$$

Posso dire in modo equivalente che $f(x) \sim 2x^2$ per $x \rightarrow 0$.

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{2x^2} = 1$$

Esempio $f(x)$ come sopra. Come si comporta $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$

È chiaro che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ condizione nec.

verificata $\Rightarrow$ la serie potrebbe convergere.

Brutale: $f(x) \sim 2x^2 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) \sim \frac{2}{n^2} \Rightarrow$ la serie converge

Rigoroso: $f(x) \sim 2x^2 \xrightarrow{\text{equiv. asint.}} f(\frac{1}{n}) \sim \frac{2}{n^2} \xrightarrow{\text{equiv. asint.}}$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{2}{n^2}$ produce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^2} = 1 \neq 0, \neq \pm \infty \Rightarrow \text{stesso comport. ...}$$

— 0 — 0 —

Esempio $\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 \sim \boxed{\frac{+1}{120}x^5}$

Primo termine che resta quando sviluppo con Taylor.

Esercizio

$$a_{n+1} = \int_0^{a_n} e^{-t^2} dt \quad a_0 = 2011$$

È autonoma!!! Questa è $a_{n+1} = F(a_n)$ dove

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ è la primitiva di e^{-t^2} che si annulla in $x=0$.

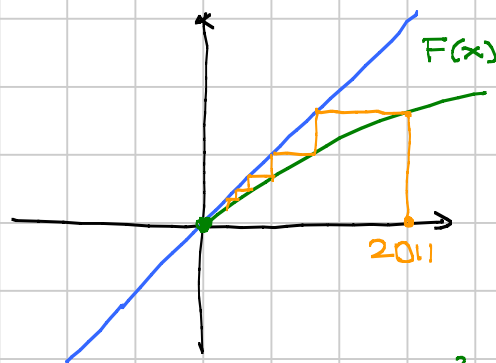
Cosa possiamo dire di $F(x)$? $F(0) = 0$

$F(x)$ è monotona perché

$$F'(x) = e^{-x^2} > 0 \text{ sempre}$$

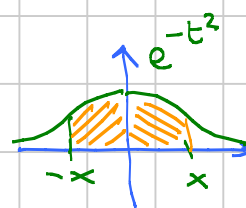
Quindi è crescente.

$F(x)$ è dispari perché



$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = - \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

e^{-t^2} è pari



$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt = x$$

$e^{-t^2} \leq 1$

Si può dimostrare che $a_n \rightarrow 0$ mediante piano classico con la monotonia

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Determinare il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{m a_n 2^n}_{C_n} x^n$

Devo fare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{m a_n 2^n}$

Uso rapporto $\rightarrow$ radice e calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) a_{n+1} 2^{n+1}}{n a_n 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_1 \underbrace{2}_{2} \underbrace{\frac{F(a_{n+1})}{a_n}}_{\frac{0}{0}}$$

Resta da calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(a_n)}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}}{1} = 1$$

$\uparrow$ $x = a_n$ $\uparrow$ $[\frac{0}{0} : \text{H\^op}]$

Conclusione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{rapporto} = 2$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{|a_n|} = 2 \Rightarrow \text{raggio di conv.} = \frac{1}{2}.$$

— 0 — 0 —