

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 108

Titolo nota

29/01/2011

Esercizio 1 $a_{n+1} = \sqrt[n]{10 + a_n}$ $a_1 = 2011$

Non autonoma. Idea: vince la radice n -esima e la succ. tende a 1.

PIANO Limitatezza + Carabiniere

(c) $1 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nota bene: $a_2 = 10 + a_1 = 2021$)

$$(ii) \quad a_n \rightarrow 1.$$

Dim. ci) $a_n \geq 1$ induzione semplicissima

$a_n \leq 10.000$ inclusione $\boxed{n=1}$ $2011 \leq 10.000$ Ovvio

$n \Rightarrow n+1$ Induksi : $a_n \leq 10.000$ Tesi : $a_{n+1} \leq 10.000$

Dim:

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{10 + a_n} \leq \sqrt[n]{10.010} \leq \sqrt{10.010} \leq 10.000$$

$\uparrow$
 uso ipotesi +
 monotonia di
 radice n -esima

$\nwarrow$
 vero per $n \geq 2$

Poiché nel passaggio induttivo è servita l'ipotesi $n \geq 2$, devo verificare $n=2$ come ulteriore passo base:

$$a_2 = 2021 \leq 10.000.$$

Dim. (ii) Grazie al p.to (i) so che $1 \leq a_n \leq 10.000$, quindi
 $11 \leq 10 + a_n \leq 10.010$, quindi

$$\boxed{\sqrt[3]{11}} \leq \sqrt[3]{10 + a_n} = \underbrace{a_{n+1}}_{\substack{\text{S} \\ \downarrow \\ -}} \leq \boxed{\sqrt[3]{10.010}}$$

Ho così dimostrato che $a_{n+1} \rightarrow 1$, quindi anche $a_n \rightarrow 1$ (shift degli indici).

— 0 — 0 —

Esercizio 2

$$a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 0$$

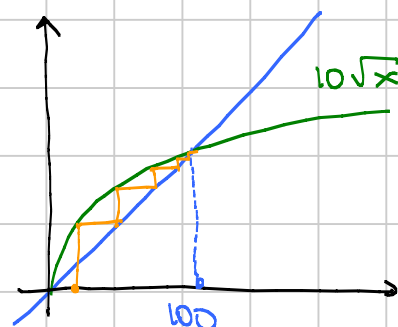
Non autonoma. Domande: determinare il limite
determinare se è monotona e come

Esperimenti: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 10.5$, $a_4 = 10\sqrt{10.5} + \frac{1}{3}$

Moltiplicare per 10 $\rightarrow$ crescere

Fare la radice $\rightarrow$ diminuire.

Altro esperimento: se fosse $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n}$
potrei fare il disegno e con pendenza
piccola positiva avrei che $a_n \rightarrow 100$
(in realtà anche con pendenza enorme)



Idea: $a_n \rightarrow 100$ anche nel caso non autonoma.

Supponiamo di sapere che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Chi è l ?

$$\boxed{a_{n+1}} = \boxed{10\sqrt{a_n}} + \boxed{\frac{1}{n}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $l = 10\sqrt{l} + 0$

$$l = 10\sqrt{l} \Rightarrow l = \begin{cases} 0 \\ 100 \end{cases}$$

PIANO

(i) $1 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 2$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (segue da (i) e (ii))

(iv) $l = 100$ (Già dimostrato)

Dim (i)

$a_n \geq 1$ inclusione facile

$a_n \leq 10.000$ inclusione $\boxed{n=2}$ $a_2 = 1 \leq 10.000$ ok.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ ipotesi: $a_n \leq 10.000$ tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

Dim. $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \leq 10\sqrt{10.000} + \frac{1}{n} \leq 10 \cdot 100 + 1 \leq 10.000$

$\uparrow$ uso Hp + monotonia di $\sqrt{x}$ $\uparrow$ uso $\frac{1}{n} \leq 1$

Dim (ii) Considero 2 casi

- Se $a_n \leq 100$ sempre, allora

$$a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \geq 10\sqrt{a_n} \geq a_n$$

$\uparrow$ trascino $\frac{1}{n}$ $\uparrow$ disequazione
 $10\sqrt{x} \geq x$ ha come sol.
 $x \in [0, 100]$

Ho così dimostrato che se sta sempre sotto 100, allora a_n è monotona crescente e questo basta per l'esistenza del limite

- Se non è monotona crescente, allora esiste un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$. A quel p.to decresce sempre, cioè $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$. Infatti lo dimo. per induzione: $n = n_0$ ovvio

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim.

$$a_{n+2} = 10\sqrt{a_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \leq 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n+1} \leq 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$

$\uparrow$ uso Hp. e monotonia

Così ho dimostrato che $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Riassumendo: ho dimostrato che

- o è sempre crescente ($\Rightarrow$ p.to (iii) ok)
 - o c'è un n_0 t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$ e da quel p.to in poi è sempre decrescente ($\Rightarrow$ p.to (iii) ok).
- o — o —

Escludo che a_n possa essere sempre crescente.

Oss.1 Se fosse sempre crescente, sarebbe $a_n \leq 100$ sempre

Oss.2 Se sta sotto 100, allora $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \geq a_n + \frac{1}{n}$

$\uparrow$
 $10\sqrt{x} \geq x \dots$

Oss.3 Dall'osservazione 2 si ha che

$$a_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{n} \geq a_{n-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \geq a_{n-2} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

Quindi $a_n \geq$ somme parziali di una serie armonica, quindi diverge, quindi è assurdo che stia sotto 100.

Esercizio 3 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Allora $S_n \rightarrow +\infty$ (serie armonica diverge). Come?

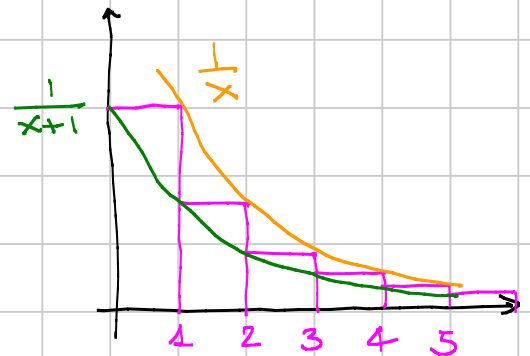
Come $\log n$. Motivazione brutale $\log x$ è la primitiva di $\frac{1}{x}$.

Più rigoroso: confronto serie integrali

$$\int_0^n \frac{dx}{x+1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$$

cioè

$$\log(n+1) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}_{S_n} \leq 1 + \log n$$



Questo dimostra che S_n diverge come un logaritmo.