

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 107

Titolo nota

29/01/2011

Esempio Consideriamo l'equazione differenziale

$$u' = u - \arctan t \quad u(0) = \alpha$$

Domanda: esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è limitata per $t \geq 0$?

Si tratta di equazione lineare del 1° ordine a coeff. costanti non omogenea:

$$u' - u = -\arctan t$$

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = ce^t$

Non si riesce a trovare esplicitamente una sol. dell'eq. non omog.

Scriviamo la formula generale con gli integrali

$$u' + a(t)u = b(t)$$

$$a(t) = -1$$

$$b(t) = -\arctan t$$

$$A(t) = -t$$

$$\text{Fatt. integr. } e^{-t}$$

$$u'e^{-t} - u e^{-t} = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$[u e^{-t}]' = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$u e^{-t} = -\int \arctan t \cdot e^{-t} dt + c$$

$$u(t) = -e^t \int \arctan t \cdot e^{-t} dt + ce^t$$

Sol. gen. eq. non omogenea

Idea: pongo $F(t) = \int \arctan t \cdot e^{-t} dt$ e posso riscrivere la solus. come

$$u(t) = -e^t F(t) + ce^t = e^t (c - F(t))$$

Posso supporre anche di aver scelto $F(t)$ in modo che sia $F(0) = 0$

Trovo c in funzione di α :

$$u(0) = e^0 (c - F(0)) = c = \alpha$$

Sol. problema di Cauchy è

$$u(t) = e^t (\alpha - F(t))$$

Come faccio a sapere se $u(t)$ è limitata per $t \geq 0$?

Se il limite è $\pm \infty$, allora non è limitata, se il limite è $\mathbb{R}$ allora è limitata

Ponenti: sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora f è limitata, cioè

esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ tali che $A \leq f(x) \leq B \quad \forall x \geq 0$.

Dim.: Applico la definizione di limite con $\varepsilon = 1$ (con $\varepsilon = 32$ sarebbe uguale).

Allora $\exists k \in \mathbb{R} \quad t.c.$

$$l-1 \leq f(x) \leq l+1 \quad \text{per ogni } x \geq k.$$

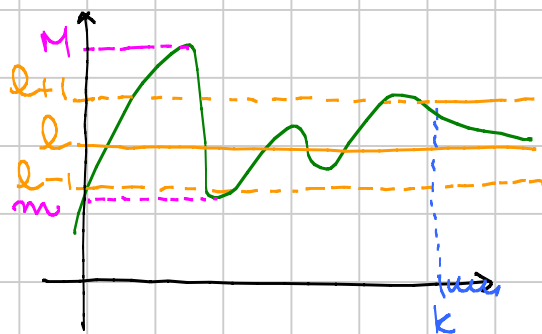
D'altra parte per w , esistono

$$M = \max \{ f(x) : x \in [0, k] \}$$

$$m = \min \{ f(x) : x \in [0, k] \}$$

Quindi, posto $B = \max \{ M, l+1 \}$ $A = \min \{ m, l-1 \}$ abbiamo proprio che

$$A \leq f(x) \leq B \quad \text{per ogni } x \geq 0$$



Oss. È essenziale che sia f definita e continua anche in $x=0$ (altrimenti ho il controesempio $f(x) = \frac{1}{x}$).

Analogo: se una successione tende ad un limite finito $l \in \mathbb{R}$, allora a_n è limitata

Dim. Definitivamente abbiamo che $l-1 \leq a_n \leq l+1$. Prima c'è solo un numero finito di termini.

Achtung! Non è vero che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ implica che esiste $\max \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$.

Ad esempio: $a_n = \arctan n$

Dobbiamo studiare il limite di $e^t(\alpha - F(t))$, dove $F(t)$ è la primitiva di $\arctan t$. e^{-t} che ha $F(0) = 0$.
A cosa tende $F(t)$? Tende a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \arctan t \, dt \quad \text{e questo converge perché } e^{-t} \cdot \arctan t \leq e^{-\frac{t}{2}}$$

Sia α_0 il valore a cui converge l'integrale. Allora abbiamo 3 casi

- Se $\alpha > \alpha_0$, allora $u(t) = e^t(\alpha - F(t)) \rightarrow [+ \infty \text{ pos}] = +\infty$
- Se $\alpha < \alpha_0$, allora $u(t) = e^t(\alpha - F(t)) \rightarrow [+ \infty \text{ neg}] = -\infty$
- Se $\alpha = \alpha_0$, allora il limite è una forma indeterminata, che tratto con Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t(\alpha - F(t)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - F(t)}{e^{-t}} \stackrel{[\frac{0}{0} \text{ Hôp}]}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-F'(t)}{-e^{-t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t} \cdot \arctan t}{e^{-t}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Quindi per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione è limitata.

Questo è un esempio di valore SOGLIA:

- sopra α_0 la soluzione $\rightarrow +\infty$
- sotto α_0 la soluzione $\rightarrow -\infty$
- per α_0 la soluzione $\rightarrow \frac{\pi}{2}$, quindi è limitata.

Altra domanda: prendiamo $\alpha > \alpha_0$, quindi $u(t) \rightarrow +\infty$.

Come tende a $+\infty$? Ci tende esponenzialmente perché

$$\frac{u(t)}{e^t} = \alpha - F(t) \rightarrow \alpha - \alpha_0 > 0$$

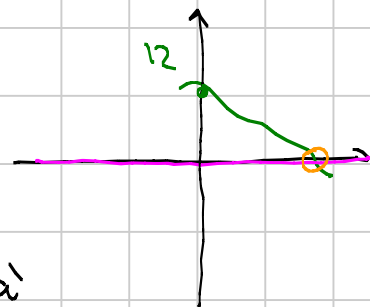
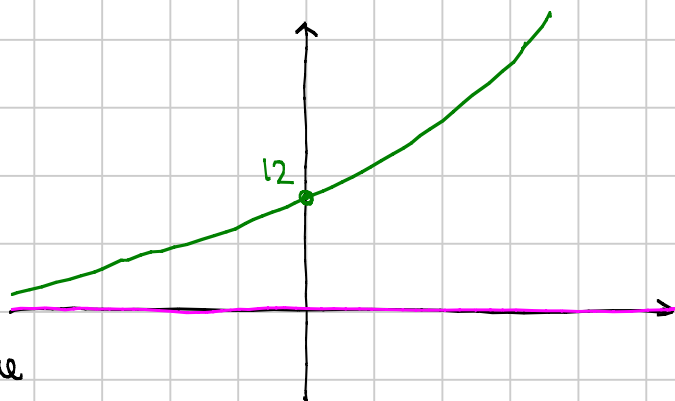
Come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u(n)}$? Questa converge perché

$$\frac{1}{u(n)} \sim \frac{1}{e^n} \quad (\text{comportamento asintotico}).$$

Esempio $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 12 \end{cases}$ Esplicitamente non si risolve

Oss.1 La funzione $u(t) \equiv 0$ risolve l'equazione

Oss.2 La soluzione che parte da 12 non può diventare negativa. Se lo diventasse, ci sarebbe un p.to in cui tocca l'altra soluzione. Ma allora per quel p.to passerebbero 2 soluzioni, cosa vietata dal te. di unicità



Oss.3 Essendo $u(t) > 0$ sempre, sarà per forza monotona crescente perché $u' = \arctan u > 0$

Oss.4 Non può esserci blow-up perché $u' \leq \frac{\pi}{2}$ sempre, quindi cresce moderatamente.

Oss.5 Si ha che $u(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ perché per ogni $t \geq 0$ si ha che $u'(t) = \arctan u(t) \geq \arctan 12$
 ↑
 perché $u(t) \geq 12$

Oss.6 Si potrebbe dimostrare che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$.

Oss.7 $u(t) \rightarrow +\infty$ linearmente. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

↑
↑

$[\frac{\infty}{\infty}, \text{H\ddot{o}p}]$
perché $u(t) \rightarrow +\infty$

— 0 — 0 —