

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 106

Titolo nota

27/01/2011

Esercizio 1 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-8}} dx$ Problemi in $x=2$ e a $+\infty$.
Integranda $f(x) \geq 0$

L'integrale con problema a $+\infty$ converge per confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$.

Esaminiamo il problema in $x=2$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-8}} = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

$\uparrow$
colpevole

Rigorosamente: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$:

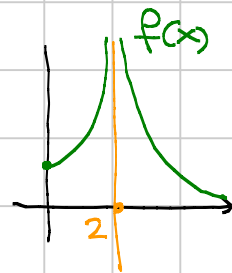
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^3-8}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale dato con problema in $x=2$ si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ con problema in $x=2$, quindi converge (diventa $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con il cambio di variabili oppure è in tabellina)

$$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx \text{ converge } (\Leftrightarrow) \alpha < 1$$

Esercizio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^3-8|}} dx = \int_0^2 + \int_2^3 + \int_3^{+\infty}$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{conv.}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{conv.}}$



L'integrale tra 0 e 2, con problema in $x=2$, si tratta esattamente come prima, con confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{8-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \neq 0 \neq +\infty$$

Ora si usa

$$\int_{b-1}^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx \text{ converge } (\Leftrightarrow) \alpha < 1$$

Esercizio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^3-7|}} dx$ Il punto in cui ci sono i problemi è ora $\sqrt[3]{7}$, ma l'idea è esattamente la stessa. Quindi si comporta come $\frac{1}{\sqrt{|x-c|}}$, dove $c = \sqrt[3]{7}$

Esercizio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7+x^5-17}} dx$

Intanto c'è il problema a $+\infty$. L'integrale con questo problema converge perché si confronta con $\frac{1}{x^{7/3}}$ e $\frac{7}{3} > 1$.

Ci sono problemi dovuti ad annullamento del denominatore?

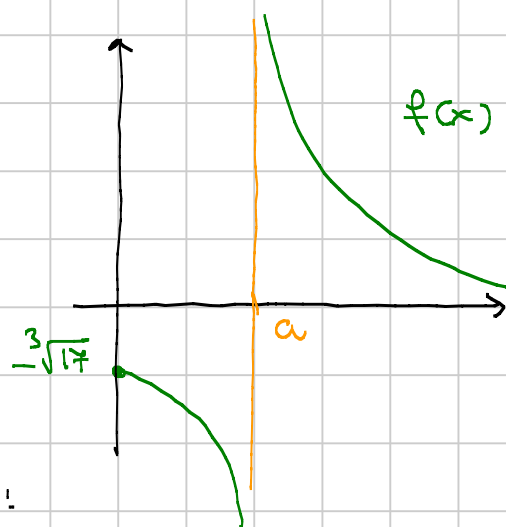
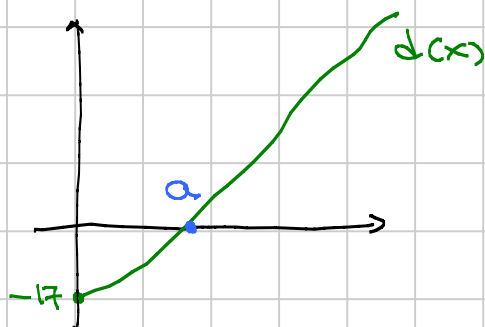
Sì: posto $d(x) = x^7 + x^5 - 17$ ho che $d(0) = -17$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = +\infty$.

Essendo $d(x)$ continuo, per una delle varianti del teo. di esistenza degli zeri esiste un p.to $a > 0$ tale che $d(a) = 0$.

Questo p.to a è unico perché $d(x)$ è iniettiva perché è strettamente crescente essendo somma di strettamente crescenti. Volendo:

$$d'(x) = 7x^6 + 5x^4 \geq 0 \text{ sempre e } = 0 \text{ solo in } x=0.$$

Sappiamo che esiste un unico p.to $a > 0$ in cui si annulla il denominatore.



L'integrale dato va quindi spezzato in 3:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^a + \int_a^{a+3} + \int_{a+3}^{+\infty}$$

converge

Problema: non so chi è a .

Idea: faccio il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-a}}$

Studiando l'integrale in $[a, a+3]$ devo fare il

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt[3]{\frac{x-a}{x^7+x^5-17}} \quad \text{Basta fare il limite sotto la radice cubica}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{x^7+x^5-17} \underset{\substack{\uparrow \\ [0: \text{H\ddot{o}p}]}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{7x^6+5x^4} = \frac{1}{7a^6+5a^4} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi l'integrale dato si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt[3]{x-a}}$ con problema in a , quindi converge.

Per l'integrale in $[0, 3]$ basta confrontare con $\frac{1}{\sqrt[3]{a-x}}$

L'integrale globale converge.

— 0 — 0 —

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \arctan x \cdot e^{-x} dx$ converge perché

$$0 \leq \arctan x \cdot e^{-x} \leq \frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}$$

e $\int e^{-x} dx$ con plim. a $+\infty$ converge (dim. con la definizione)

— 0 — 0 —

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^{1/n} \arctan x \cdot e^{-x} dx$

Problema: non so fare la primitiva di $\arctan x \cdot e^{-x}$. La chiamo $F(x)$.

Allora il limite diventa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (F(\frac{1}{n}) - F(0)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\frac{1}{n}) - F(0)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ [0: \text{H\ddot{o}p}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{2x} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{derivata primitiva} \\ = \text{integrandi} \end{array}$$

$$\frac{1}{n} = x \quad \uparrow$$

Quando $n \rightarrow +\infty$
ho che $x \rightarrow 0^+$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x \cdot e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

Esempio 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{1/n} \arctan x \cdot e^{-x} dx}_{a_n}$ Banalmente converge

Faccio il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$ e devo fare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^{1/n} \arctan x \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{2} \neq 0 \neq +\infty$$

$\Rightarrow$ converge.

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{\frac{1}{n^2}} \sin x \cdot \log(1+x^2) e^{3+x^3} dx \right]^\alpha$

converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{8}$

Brutale: $f(x) \sim x^3$ per $x \rightarrow 0$, quindi è un po' come fare

$$\int_0^{\frac{1}{n^2}} x^3 \sim [x^4]_0^{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n^8}$$

Metto α e trovo $\frac{1}{n^{8\alpha}}$. Converge $\Leftrightarrow 8\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{8}$

Rigoroso: confronto asintotico tra l'integrale e $\frac{1}{n^8}$ usando Hôpital.