

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 105

Titolo nota

27/01/2011

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5+3}} dx$ Converge banalmente

L'unico problema è a $+\infty$. L'integranda è ≥ 0 (posso usare vari criteri). Confronto asintotico con $\frac{1}{x^{5/2}}$ (suggerito dal brutale)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5+3}} \cdot x^{5/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \boxed{\arctan x^2} \cdot \boxed{\sqrt{\frac{x^5}{x^5+3}}} = \frac{\pi}{2} \neq 0 \neq +\infty$$

$\downarrow$ $\frac{\pi}{2}$ $\downarrow$ 1

I due integrali impropri con problema a $+\infty$ hanno lo stesso comportamento. Quello di $g(x)$ converge ($\frac{5}{2} > 1$) $\Rightarrow$ quello dato converge.

— 0 — 0 —

Esercizio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5}} dx$ Ora ci sono pbi. a 0 e a $+\infty$.
A $+\infty$ converge come prima.

Brutale: $\frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow$ converge

$\uparrow$ per $x \rightarrow 0$

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^5}} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x^2}{x^2} = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

$\uparrow$ solito cambio $y = x^2$

Quindi l'integrale dato con problema a 0 si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ con problema a 0, quindi converge.

— 0 — 0 —

Esercizio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^3}} dx$ A $+\infty$ converge perché $\frac{3}{2} > 1$
(rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$)

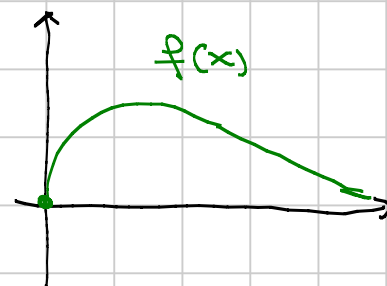
Brutale:

$$\frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^3}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{x} \rightarrow 0$$

$\uparrow$ per $x \rightarrow 0$

Questo dice che il problema in 0 non c'è perché l'integranda è limitata

— 0 — 0 —



Esercizio 4 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ Integranda ≥ 0 , unico problema a $+\infty$

Provo confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{22}}$ (qualunque espon. > 1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{22}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{22}}{e^{\sqrt{x}}} \quad \text{Per concludere il lim.}$$

$$\text{1° modo} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{22 \log x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x} \left(22 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - 1 \right)} = [e^{-\infty}] = 0$$

2° modo cambio di variabili $\sqrt{x} = y$, cioè $x = y^2$. Diventa

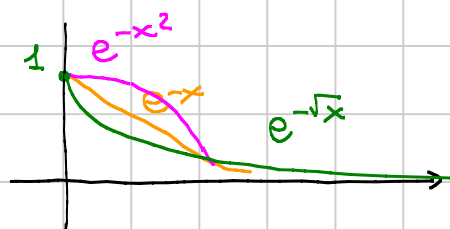
$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{44}}{e^y} = 0 \quad (\text{esponenziale batte potenza})$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ siamo in un caso limite

$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \text{ vicino al problema, quindi } f(x) \leq g(x) \right]$

$\int g(x) dx$ con pbm. a $+\infty$ converge ($22 > 1$) $\Rightarrow \int f(x) dx$ converge

$$e^{-\sqrt{x}} \sim 1 - \sqrt{x} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$



Esercizio 5

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+3) \log x} dx$$

Integrandi $f(x) \geq 0$

Problemi in $x=1$ e a $+\infty$

A $+\infty$ converge e si può dimostrare in almeno 2 modi.

1° modo: confronto asintotico con $\frac{1}{x^2}$. Viene il caso limite dalla parte giusta (avrebbe bene anche con $\frac{1}{x^{3/2}}$ se uno prova con $g(x) = \frac{1}{x}$ ottiene che è $\leq$ di un integrale che diverge $\Rightarrow$ BOK)

se uno prova con $g(x) = \frac{1}{x^{5/2}}$ ottiene che è $\geq$ di un integrale che converge $\Rightarrow$ BOK.

vera $\forall x \geq 3$

2° modo: confronto secco $\frac{1}{(x^2+3) \log x} \leq \frac{1}{x^2 - 1} \quad \int \frac{1}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow \dots$

Esaminiamo il problema in $x=1$, cioè $\int_1^2 \frac{1}{(x^2+3) \log x} dx$

Con il cambio $y = x-1$ diventa $\int_0^1 \frac{1}{((y+1)^2+3) \log(1+y)} dy$
 $f(y)$

Brutale: $f(y) \sim \frac{1}{4 \log(1+y)} \sim \frac{1}{4y} \Rightarrow \text{DIVERGE}$
 $\log(1+y) \sim y$

Rigoroso: C.A. con $\frac{1}{y}$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{((y+1)^2+3)} \cdot \frac{y}{\log(1+y)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\neq 0}{\neq +\infty} \Rightarrow \text{stesso comport.}$$

Esercizio 6 $\int_1^2 \frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} dx$ Il colpevole dell'essere l'int. improprio è il $\log x$.

Faccio un primo confronto asintotico con $\frac{1}{\sqrt{\log x}} = g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} \cdot \sqrt{\log x} = \frac{\arctan 1}{7} = \frac{\pi}{28} \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi basta studiare $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\log x}} dx$. Ora facciamo il cambio di variabili $x-1=y$.

Diventa

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\log(1+y)}} dy$$

Brutale: $\frac{1}{\sqrt{\log(1+y)}} \sim \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \text{converge.}$
 $y \rightarrow 0^+$

Faccio il confronto asintotico con $R(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{\log(1+y)}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{y}{\log(1+y)}} = 1 \neq 0 \neq +\infty.$$

Esercizio 7 $\int_3^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} dx$ converge!

Basta un confronto secco: $\frac{\arctan x}{\sqrt{\log x} \cdot (x^3+6)} \leq \frac{35}{1 \cdot x^3}$