

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 104

Titolo nota

26/01/2011

Esercizio 1 Studiare il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \frac{\log x}{x-3} = \lambda$$

Studio della funzione $f(x)$.

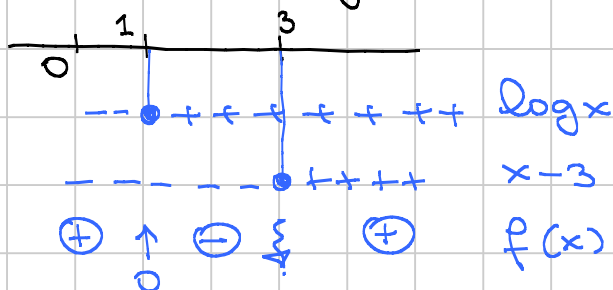
Definita e continua per $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\text{logaritmi perdono dalle potenze})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \left[\frac{\log 3}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \left[\frac{\log 3}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{-\infty}{-3} \right] = +\infty$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



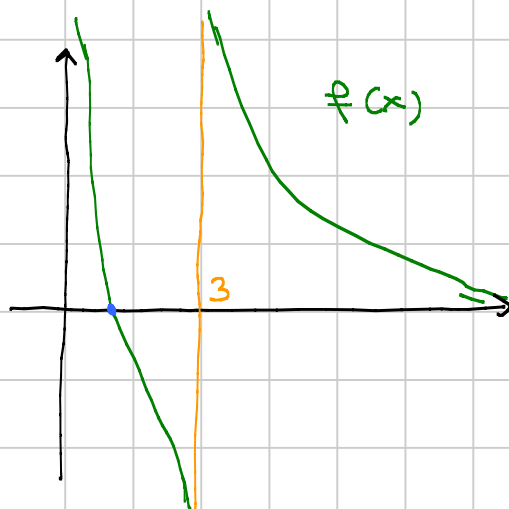
$$\text{Studio il segno di } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-3) - \log x}{(x-3)^2} = \frac{1 - \frac{3}{x} - \log x}{(x-3)^2}$$

Il denomin. è sempre > 0 dove $f(x)$ è definita. Quindi il segno di $f'(x)$ dipende dal segno del numeratore.

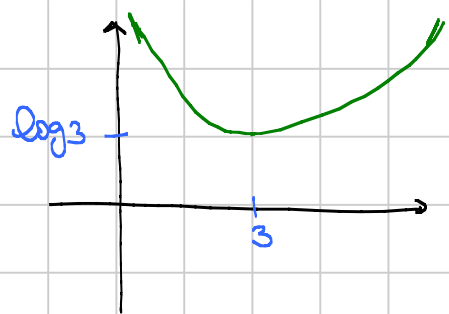
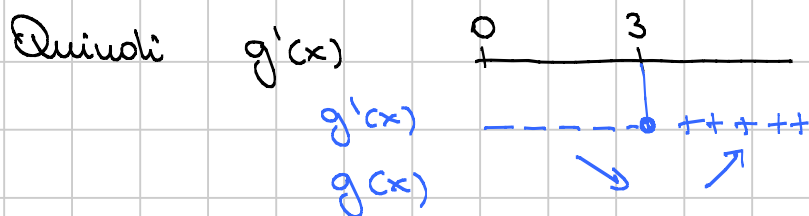
Pongo $g(x) = \log x + \frac{3}{x} - 1$ e studio questa funzione

Definita e continua per $x > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[-\infty + \infty - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x + 3 - x}{x} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$



Calcolo $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{x-3}{x^2}$



Il segno di $g(x)$ dipende da $g(3) = \log 3 - 1 > 0$.

Quindi $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Di conseguenza $f'(x) < 0$ ovunque definita, il che conferma il grafico di $f(x)$ tracciato.

Quindi:

$$\begin{array}{lcl} \lambda \leq 0 & \leadsto & 1 \text{ soluzione} \\ \lambda > 0 & \leadsto & 2 \text{ soluzioni} \\ & -o-o- & \end{array}$$

Achtung! Abbiamo dim. che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Posso dedurre che $f(x) < f(y)$ per ogni scelta di x e y nell'insieme di definizione con $x > y$.

NO!! Lo posso dire solo separatamente in $(0, 3)$ e in $(3, +\infty)$.

I teoremi di monotonia richiedono che $f(x)$ sia definita in tutto l'intervallo $[x, y]$ per poter confrontare $f(x)$ e $f(y)$.

-o-o-

Esercizio 2 $f(x) = x \log(x+4)$

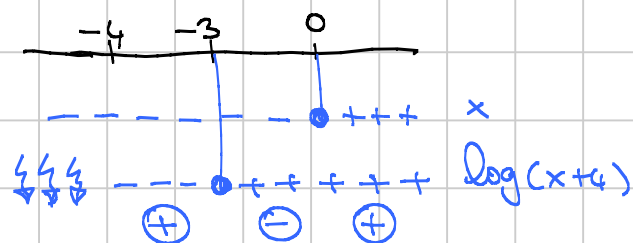
(a) inf / sup / max / min in $(-4, -3)$

Studio $f(x)$

Definita e continua per $x+4 > 0$, cioè $x > -4$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = [-4 \cdot (-\infty)] = +\infty$$

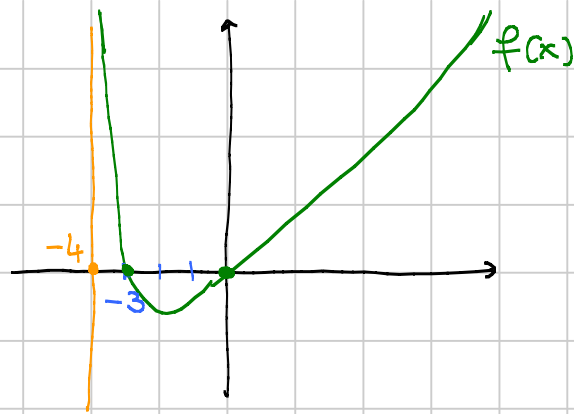
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } \log(x+4) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 1 \Leftrightarrow x = -3$$



$$f'(x) = \log(4+x) + \frac{x}{4+x}$$

La disequazione non è elementare.

Però a noi interessa solo il grafico per $x \in (-4, -3)$. In questo intervallo ho che



$$f'(x) = \underbrace{\log(4+x)}_{\text{neg.}} + \underbrace{\frac{x}{4+x}}_{\text{neg.}} < 0 \text{ per ogni } x \in (-4, -3)$$

Quindi di sicuro il tratto per $x \in (-4, -3)$ è monotono decrescente.

Quindi $\sup = +\infty$, $\max$ N.E., $\inf = 0$, $\min$ N.E.

(b) Studiare concavità e convessità. Bisogna studiare il segno di

$$f''(x) = \frac{1}{4+x} + \frac{\cancel{4+x} - \cancel{x}}{(4+x)^2} = \frac{4+x+4}{(4+x)^2} = \frac{x+8}{(4+x)^2}$$

Quindi $f''(x) > 0$ ovunque è definita $f(x) \Rightarrow$ convessa.

(c) Studiare, al variare di $n \in \mathbb{N}$, il numero di soluzioni di $f(x) = n$.
Verebbe da dire che le soluzioni sono 2 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per verificarlo servono 3 cose

- il fatto che c'è una soluzione unica in $(-4, -3]$
- " " " non ci sono soluzioni in $(-3, 0)$ perchè $f(x)$ è negativa lì
- " " che c'è una soluzione unica in $[0, +\infty)$.

Occorre il segno di $f'(x)$ per $x \geq 0$, ma questo è positivo perchè somma di 2 termini positivi.