

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 103

Titolo nota

26/01/2011

Varianti del teorema di Weierstrass

Weierstrass classico Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esistono
 $\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$
 $\min \{ \quad \quad \quad \}$

intervallo con estremi compresi

1ª variante Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e PERIODICA. Allora esistono
 $\max / \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

Dim. Sia T un periodo di $f(x)$. Ovviamente $T > 0$. Sia
 $M = \max \{ f(x) : x \in [0, T] \}$

Questo esiste per il Weierstrass classico.

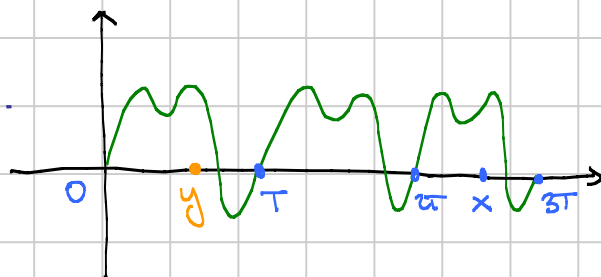
Dico che $M = \max$ su tutto $\mathbb{R}$. Infatti prendo un $x \in \mathbb{R}$ qualunque. Per la periodicità $\exists y \in [0, T]$ t.c. $f(y) = f(x)$ (esercizio: trovare una formula che fornisce y in funzione di x).

Ma allora

$$f(x) = f(y) \leq M.$$

D'altra parte esiste almeno un p.to

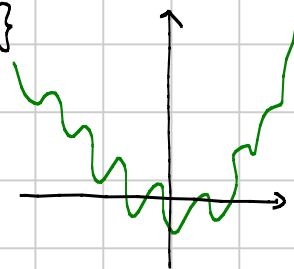
$x_0 \in [0, T]$ dove $f(x_0) = M$.



2ª variante Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Allora esiste per forza $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$



Dim. Considero $f(0)$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, vuol



dire che $\exists k > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad \forall x \geq k$$

Analogamente $\exists H < 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad \forall x \leq H.$$

Idea: la battaglia per il minimo si gioca in $[H, k]$. Pongo allora

$$m = \min \{ f(x) : x \in [H, k] \},$$

e questo esiste per W. classico. Dico che

$$m = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}.$$

Devo dimostrare 2 cose:

(i) $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = m$.

La (ii) è molto facile: poiché m è minimo in $[H, k]$, per forza esiste un $x_0 \in [H, k]$ in cui $f(x_0) = m$.

Per la (i) distinguo 3 casi

• se $x \in [H, k]$, allora $f(x) \geq m$ perché m è il min. in $[H, k]$

• se $x > k$, allora $f(x) \geq f(0) + 1 \geq f(0) \geq m$
 $\uparrow$ def. di k $\uparrow$ banalità $\uparrow$ perché $f(x) \geq m$ per ogni pto $x \in [H, k]$ e $0 \in [H, k]$.

• se $x < H$, allora è uguale: $f(x) \geq f(0) + 1 \geq f(0) \geq m$.

$\uparrow$ def. di H

— o — o —

Analogo con il max: se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

allora per forza esiste $\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

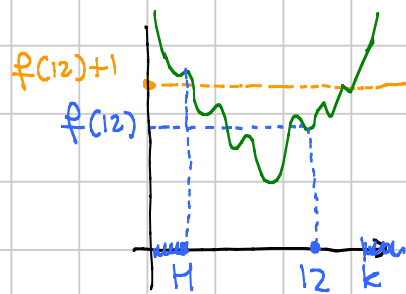
— o — o —

Esercizio: dimostrare la versione con il max

3ª variabile Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{f(x) : x > 0\}$



Dim. Considero $f(12)$. Per definizione di limite

esiste $k > 12$ tale che $f(x) \geq f(12) + 1 \quad \forall x \geq k$

esiste $H \in (0, 12)$ tale che $f(x) \geq f(12) + 1 \quad \forall x \in (0, H)$.

Esiste per W. classico $m = \min \{f(x) : x \in [H, k]\}$ e dico che è minimo anche in $(0, +\infty)$. La cosa da dim. è che $f(x) \geq m$ per ogni $x > 0$.

• Se $x \in [H, k]$, allora è la def. di min in $[H, k]$.

• Se $x > k$, allora $f(x) \geq f(12) + 1 \geq f(12) \geq m$

def. di k Banalità 12 sta in $[H, k]$, quindi ha già giocato la partita per il minimo.

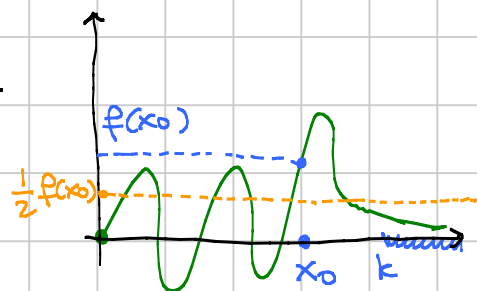
• Se $x \in (0, H)$ è uguale.

4ª variabile Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$f(0) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

Allora esiste $\max \{f(x) : x \geq 0\}$

(e anche il min, a dire la verità)



Dim. Intanto $\exists x_0 > 0$ tale che $f(x_0) > 0$

(tendendo a 0^+ si ha che $f(x)$ è > 0 per ogni x grande abbastanza).

Considero ora $\frac{1}{2} f(x_0)$. Sempre grazie al limite abbiamo che

$\exists k > 0$ tale che $f(x) \leq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \geq k$

Considero infine

$$M = \max \{f(x) : x \in [0, k]\}$$

e dico che M è max su tutto $[0, +\infty)$.

Devo verificare 2 cose

(i) $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ b.c. $f(x_1) = M$ (basta prendere un p.to di max in $[0, k]$)

(ii) $\forall x \geq 0$ si ha $f(x) \leq M$. Ci sono 2 casi

- se $x \in [0, k]$, allora $f(x) \leq M$ per definizione di max in $[0, k]$;

- se $x > k$, allora

$$f(x) \leq \frac{1}{2} f(x_0) \leq f(x_0) \leq M$$

$\uparrow$ def. di k $\uparrow$ b.m.d. $\nwarrow$ $x_0 \in [0, k]$, quindi $f(x_0) \leq M$.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che c'è anche il minimo (idea: o il minimo è zero, allora..., o esiste un p.to in cui $f(x) < 0$ e si ripete lo stesso discorso di prima)

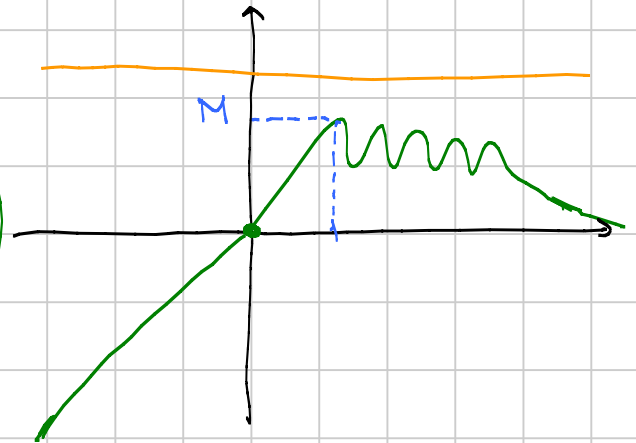
— o — o —

Esempio $x^3 \arctan(e^{-x}) = \lambda$. Dimostrare che esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione non ha soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \left[-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} \frac{\arctan(e^{-x})}{e^{-x}} = 0^+$$

Inoltre $f(x) \leq 0$ per ogni $x \leq 0$.



Per una variante di W, esiste $M = \max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

Ora basta prendere $\lambda > M$.