

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 102

Titolo nota

25/01/2011

Esempio 1
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Serie di potenze con $c_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$$

Studio i casi $x = \pm 1$ separatamente. In entrambi i casi manca la condizione necessaria, quindi non converge.

Conclusione: converge $\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$.

Per vedere a cosa converge ci sono 2 possibilità:

1 - osservare che è una geometrica, quindi converge a $\frac{1}{1-x}$

2 - osservare che è la serie di Taylor della funzione

$f(x) = (1-x)^{-1}$ e quindi, DOVE CONVERGE, converge alla funzione $f(x)$ stessa.

Esempio 2
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Dove converge? $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$

Studio a parte: $x = 1 \Rightarrow$ armonica che diverge

$x = -1 \Rightarrow$ converge per Leibnitz

Quindi la serie converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1)$.

A cosa converge? Spero che sia una serie di Taylor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Ricorda molto $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Quindi la serie data è

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \text{serie data}$$

Conseguenza: la serie data, dove converge, converge a $-\log(1-x)$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad \forall x \in \boxed{[-1, 1)} \quad \begin{array}{c} \text{ZONA DI CONVERGENZA} \\ \uparrow \end{array}$$

Caso speciale: $x = -1$ e ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$

$$x = \frac{1}{2} \text{ e ottengo } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \log 2$$

Osservazione Lo stesso esercizio si può vedere a partire da calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$. Procedimento

- vederla come caso $x = \frac{1}{2}$ della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- studiare la zona di convergenza
- vedere la serie come una serie di Taylor in modo da calcolarne la somma
- sostituire $x = \frac{1}{2}$ nella formula trovata.

Esempio 3 Calcolare $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

In formule, calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Intanto conv. per Leibnitz

Sembra molto la serie di Taylor di $\arctan x$ calcolata per $x = 1$. Dove converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \stackrel{y=x^2}{=} x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n+1}$$

Nella variabile y ho una serie di potenze con $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, quindi

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Restano i casi $y = 1 \rightsquigarrow$ converge per Leibnitz

$y = -1 \rightsquigarrow$ diverge perché se ne va il $(-1)^n$.

Conclusione: la serie in y converge $\Leftrightarrow y \in (-1, 1]$, quindi la serie in x converge per $x^2 \in (-1, 1]$, quindi sicuramente per $x \in (-1, 1)$.

C'è poi da ristudiare il bordo che è ok per $x = 1$.

Quindi la serie di Taylor di $\arctan x$ converge anche per $x = 1$, quindi la somma iniziale è

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \dots$

Dove converge? $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$.

Rovando $x = \pm 1$ manca sempre la cond. nec., quindi non converge.

Conclusione: la serie data converge $\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$.

A cosa converge? Metto in evidenza una x :

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots &= x (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) \overset{\text{LOSCO}}{\downarrow} x (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)' \\ &= x (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)' \\ &= x \left[\frac{1}{1-x} \right]' = x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Conclusione: $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ per ogni $x \in (-1, 1)$

Losco: è vero che la derivata della somma è la somma delle derivate solo se la somma è finita.

In generale non è vero per le serie, ma è vero per la serie di potenze.

Teorema 4 (Scambio serie $\leftrightarrow$ derivata) La derivata di una serie di potenze è la serie delle derivate. In simboli

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n x^{n-1} \quad \forall x \text{ per cui entrambe conv.}$$

Inoltre le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza (ma il comportamento per $x = \pm R$ può essere diverso).

Oss. letto al contrario: la primitiva di una serie di potenze è la serie delle primitive.

Esempio 5 Calcolare $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. È il caso $x = \frac{1}{2}$ di $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 x^n$

Raccolgo una x : $x \sum_{n=3}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=3}^{\infty} [n x^n]' = \text{(teo. scambio)}$

$$= x \left[\sum_{n=3}^{\infty} n x^n \right]' = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} n x^n - 0 - x - 2x^2 \right]'$$

tolgo termini con $n=0,1,2$

$\uparrow$
Esempio 4

$$= x \left[\frac{x}{(1-x)^2} - x - 2x^2 \right]' = x \left[\frac{(1-x)^2 + 2(1-x) \cdot x}{(1-x)^4} - 1 - 4x \right]$$

Aggiunto dopo video

$$= x \left(\frac{x+1}{(1-x)^3} - 1 - 4x \right) = \text{conto.}$$

Ora è facile vedere che il raggio di convergenza della serie di partenza è $R=1$, quindi posso sostituire $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot 8 - 1 - 2 \right) = \frac{1}{2} (12 - 1 - 2) = \frac{9}{2}$$

Cometto dopo video

$$\frac{9}{2^3} + \frac{16}{2^4} + \frac{25}{2^5} + \frac{36}{2^6} + \dots = \frac{1}{2}$$

Ops: c'è evidentemente un errore di conto da qualche parte (già il primo termine è maggiore di 1...): ricontrollare !!!