

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 101

Titolo nota

25/01/2011

SERIE DI POTENZE Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

dove i c_n sono numeri reali assegnati, detti coefficienti.

Detto brutalmente: è "un polinomio di grado infinito".

Domande: → per quali valori della x converge

→ per i valori di x per cui converge, calcolare la somma.

Teorema 1 (Raggio di convergenza). Esiste $R \in [0, +\infty]$ (può essere $+\infty$) tale che

- per ogni $|x| < R$ la serie converge,
- per ogni $|x| > R$ la serie non converge e anzi non verifica nemmeno la condizione necessaria,
- per $|x| = R$ dipende caso per caso, anche indipendentemente: in $+R$ e $-R$ possono succedere cose diverse.

Interpretazioni Quando $R \in (0, +\infty)$ (estremi esclusi) la situazione è



quindi la zona di convergenza è un intervallo centrato nell'origine con o senza estremi a seconda dei casi

Quando $R = +\infty$, vuol dire che la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$, perché siamo sempre nel 1° caso.

Quando $R = 0$ la serie converge solo per $x = 0$ (tutte le serie di potenze convergono per $x = 0$ al valore c_0).

Teorema 2 (Calcolo del raggio di convergenza)

Supponiamo che esista

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, +\infty] \text{ (estremi inclusi)}$$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (con l'accordo che $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Osservazione Quando il limite non esiste, R esiste comunque per via del teorema 1, ma non si calcola con questa formula.

Dim. considero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Provo a studiarla con l'assoluta convergenza.

Studio quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$$

Questa la studio con il criterio della radice, per cui calcolo

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \rightarrow L|x|$$

Ci sono quindi 2 (o meglio 3) casi

- Se $L|x| < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, abbiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| < +\infty$, quindi per assoluta convergenza converge pure la serie di partenza.
- Se $L|x| = 1$, cioè se $|x| = \frac{1}{L}$, allora BOK.
- Se $L|x| > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, abbiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = +\infty$, quindi BOK... apparentemente. In realtà, per il criterio della radice applicato ai limiti, abbiamo anche che $|c_n| \cdot |x|^n = |c_n x^n| \rightarrow +\infty$, ma allora non è possibile che $c_n x^n \rightarrow 0$ (se tendesse a zero, lo farebbe pure con il valore assoluto). Ma allora sulla serie iniziale manca la condizione necessaria, quindi non può convergere.

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$. Serie di potenze con $c_n = \frac{2^n}{n}$.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2$$

Quindi $R = \frac{1}{2}$. Restano da studiare a mano i casi $x = \pm \frac{1}{2}$.

Per $x = \frac{1}{2}$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Per $x = -\frac{1}{2}$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

e questa converge per Leibnitz.

Conclusione: la serie data converge $\Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{n^2}} = 3$

Quindi $R = \frac{1}{3}$. Verifico a parte $x = \pm \frac{1}{3}$.

Per $x = \frac{1}{3}$ trovo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge.

Per $x = -\frac{1}{3}$ trovo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ che converge (Leibnitz o assol. conv.)

Conclusione: la serie data converge $\Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{3^n}{n^2}} x^{2n}$. Non ci sono le potenze d'ispari, quindi è
 c_{2n} come se tutti i c_n con n dispari fossero nulli

Se vado a calcolare $\sqrt[n]{|c_n|}$, questo non ha limite (comp. diverso sui pari e sui dispari). Tuttavia:

pongo $y = x^2$ e diventa sost. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} y^n$. Sappiamo da prima che questa converge $\Leftrightarrow$

$y \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, quindi quella originale conv. $\Leftrightarrow x^2 \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, quindi
 $\Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ (ho risolto $-\frac{1}{3} \leq x^2 \leq \frac{1}{3}$).

SERIE DI TAYLOR

Si dice serie di Taylor una serie di potenze la cui somme parziali sono i polinomi di Taylor di una data funzione

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Teorema 3 Consideriamo la serie di Taylor di una funzione decente (e qualunque cosa ottenuta a partire dalle funzioni elementari senza problemi burocratici) è decente.

Allora per tutti gli x per cui la serie converge (e solo per questi x), la somma della serie è proprio la funzione di partenza.

Esempio Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$. Questa è il caso $x=8$ della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ che è la serie di Taylor di e^x .

Per quali x converge? Calcolo $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

$L=0$, quindi $R=+\infty$, quindi la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Per il teorema 3 la somma è la funzione di partenza, cioè e^x .
Quindi la somma della serie di partenza è e^8 .

— o — o —