

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 100

Titolo nota

25/01/2011

CRITERIO SERIE $\leftrightarrow$ INTEGRALI

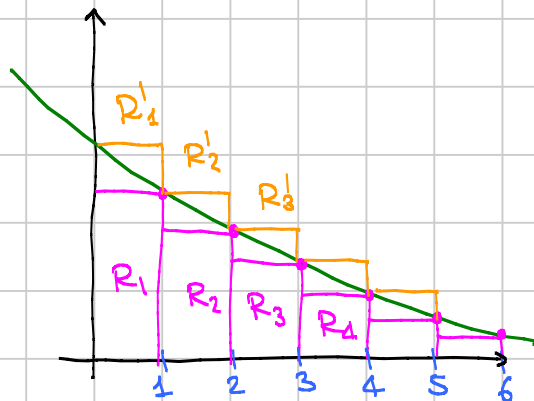
"Gli integrali aiutano le serie"

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale

- $f(x)$ è debolmente decrescente
- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$

È chiaro che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum \text{area rettangoli "sotto"}$$



Ma $\text{area}(R_i) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altezza}}}{f(i)}$, quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$

Considerando invece i rettangoli "sopra" $R_1', R_2', \dots$ avremo che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum \text{Area rett. "sopra"} = \sum_{i=1}^{\infty} f(i-1) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=0}^{\infty} f(i)$$

Confronto serie-integrali

Piccola variante: se abbiamo $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $M \in \mathbb{N}$ e come prima f è deb. decrescente e ≥ 0 , otteniamo

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} f(i) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{i=M}^{\infty} f(i)$$

Le due serie a destra e sinistra hanno lo stesso comportamento perché differiscono per un solo termine. Conseguenza:

L'integrale improprio converge $\Leftrightarrow$ la serie converge.

Dim. se la serie converge, allora per la disug. di dx converge l'integrale
se la serie fa $+\infty$, allora per la disug. di sx l'integrale fa $+\infty$.

Esempio classico di utilizzo: dimostrare il comportamento della serie armoniche generalizzate.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^a}$, definita in $[1, +\infty)$.

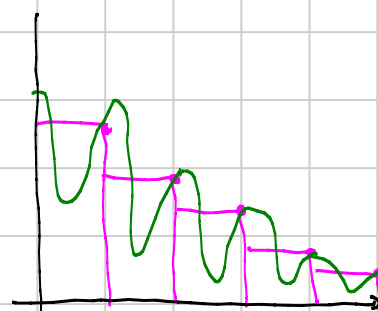
Si tratta di una funzione deb. decr. e ≥ 0 , quindi per il criterio

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^a} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx \text{ converge}$$

Ora sappiamo che l'integrale converge $\Leftrightarrow a > 1$ (dimostrato usando la definizione), quindi lo stesso vale per la serie.

Esempio analogo è la convergenza di $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$
(stessa cosa con $f(x) = \frac{1}{x \log^a x}$).

Domanda: dove è servita l'ipotesi che f è decrescente?
Nel confrontare la funzione con i rettangoli.



"Le serie aiutano gli integrali"

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge (si dimostra con la definizione + integrazione per parti)}$$

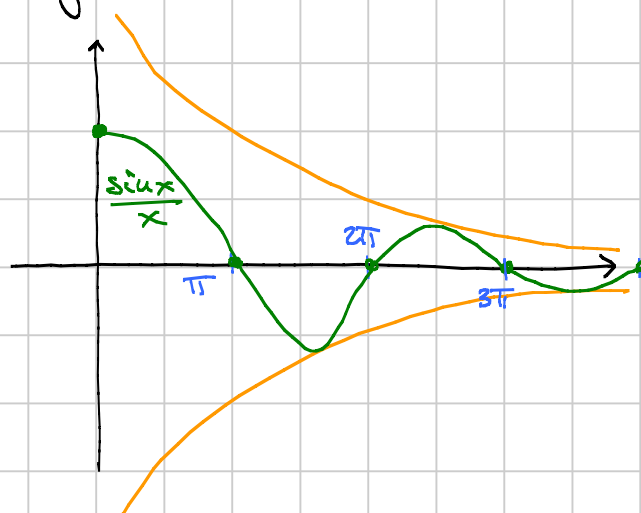
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \leadsto \text{"metodo dei triangolini"}$$

$\frac{\sin x}{x}$, escluso $x=0$, si annulla

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

Il suo segno coincide con il segno di $\sin x$. Infine

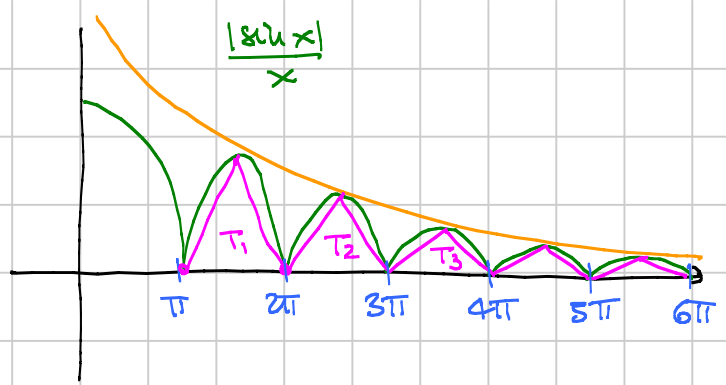
$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \text{serie area delle "colline"}$$

$\geq$ serie area
"triangolini"

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$



Base $T_n = \pi$ perché è la lunghezza dell'intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$

Altezza $T_n =$ valore della funzione nel punto medio della base, cioè in $n\pi + \frac{\pi}{2}$, cioè

$$\frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{|\pm 1|}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Quindi

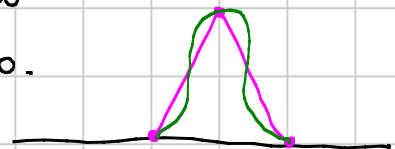
$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altezza}}}{\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

La serie diverge (è sostanzialmente armonica) quindi l'integrale improprio diverge. Quindi questo è un esempio in cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty \quad (\text{la somma delle aree delle colline diverge})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge} \quad (\text{la somma delle aree delle colline prese a segno alterno converge})$$

Osservazione 1 Abbiamo barato dicendo che il triangolino sta sotto la collina. Non abbiamo mai escluso la situazione a fianco.

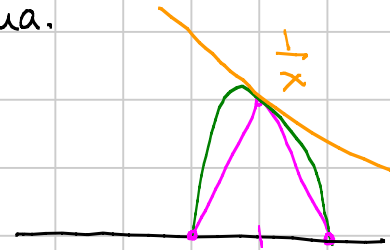


Osservazione 2 Il vertice del triangolino NON è nel p.to di max della funzione.

Calcolo la derivata: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$

Nel vertice del triangolino, cioè $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ si ha che $\cos x = 0$ e $\sin x = \pm 1$, quindi la derivata non si annulla.

Il punto di max è in realtà un po' prima.



Un motivo è che a parità di valori di $\sin x$, conviene sempre avere un denominatore + piccolo.

— o — o —

Osservazione 3 Il confronto serie-integrali permette di stimare l'errore che si ha troncando una serie ad un certo p.to.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$. Questa converge. Voglio sapere più o meno quanto fa la somma. Calcolo (al computer)

$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^{10}}$. Che errore sto commettendo? Ovviamente

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} \leq \underbrace{\int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^{10}} dx}_{\text{e questo lo so calcolare, ottenendo così una stima dall'alto dell'errore commesso}}$$

e questo lo so calcolare, ottenendo così una stima dall'alto dell'errore commesso

— o — o —