

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 099

Titolo nota

22/01/2011

Eq. Diff. Lineari 1° ordine, anche a coeff. non costanti
(se è a coeff. costanti, è il caso precedente con $k=1$)

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Due metodi equivalenti: $\rightarrow$ Fattore integrante
 $\rightarrow$ Variazione delle costanti

Fattore integrante Considero una primitiva $A(t)$ della $a(t)$, cioè
 $A'(t) = a(t)$.

Moltiplico l'equazione per

$e^{A(t)}$ = fattore integrante

$$u'(t)e^{A(t)} + a(t)u(t)e^{A(t)} = b(t)e^{A(t)}$$

$$\left[u(t)e^{A(t)} \right]' = b(t)e^{A(t)}$$

Ora basta fare la primitiva per avere che

$$u(t)e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)} dt + c$$

Non resta che ricavare $u(t)$ per avere la soluzione generale:

$$u(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)} dt$$

Formula per soluzione generale eq. 1° ordine Lineare

Si riesce a risolvere sempre per di

- $\rightarrow$ sapere fare la primitiva di $a(t)$,
- $\rightarrow$ sapere fare la primitiva di $b(t)e^{A(t)}$.

Esempio 1

$$u' + tu = t^3$$

Oss. Non è a coeff. costanti, non è a variabili separabili, quindi non rientra in altre tipologie

$$a(t) = t \quad A(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad \text{Fattore integrante: } e^{\frac{1}{2}t^2} \text{ - Moltiplico!}$$

$$u' e^{\frac{1}{2}t^2} + t u e^{\frac{1}{2}t^2} = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\left[u e^{\frac{1}{2}t^2} \right]' = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow u e^{\frac{1}{2}t^2} = \int t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} dt = (*)$$

Provo la sostituzione $y = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow dy = t dt$

$$\begin{aligned} \int t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} dt &= \int t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} t dt = 2 \int y e^y dy = 2 \{ y e^y - \int e^y dy \} \\ &= 2 y e^y - 2 e^y \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}t^2 - 1 \right) e^{\frac{1}{2}t^2} \\ &= t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2 e^{\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

Tornando a (*) abbiamo che

$$u e^{\frac{1}{2}t^2} = t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2 e^{\frac{1}{2}t^2} + C, \text{ da cui}$$

$$u(t) = \underbrace{C}_{\text{costante}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t^2}}_{\text{costante}} + \underbrace{t^2 - 2}_{\text{costante}}$$

Soluzione generale equazione non omogenea.

2° metodo: teoria generale + tentativo o variazione costanti.

Devo risolvere

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Per la teoria generale la soluzione sarà del tipo

$$u(t) = C u_1(t) + \bar{u}(t)$$

dove $u_1(t)$ è sol. dell' omogenea e $\bar{u}(t)$ è sol. qualunque della non omog.

Risolvere l'equazione omogenea $u' + a(t)u = 0$. Questa è a variabili separabili e come tale la tratto

$$u' = -a(t)u ; \quad \frac{du}{dt} = -a(t)u ; \quad \frac{du}{u} = -a(t)dt ;$$

$$\log |u| = -A(t) + c \rightarrow |u| = e^{-A(t)+c} \rightarrow u(t) = \pm e^{-A(t)+c}$$

cioè

$$u(t) = \pm e^c \cdot e^{-A(t)} = k e^{-A(t)} \quad \text{Soluzione generale equazione omogenea.}$$

Per trovare la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ ho 2 opzioni:

→ tentativo

→ variazione delle costanti: la soluzione dell'omog. era $u(t) = k e^{-A(t)}$, quindi il tentativo da fare è

$$u(t) = k(t) e^{-A(t)}$$

Derivo:

$$u'(t) = k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco nell'equazione e trovo

$$\underbrace{k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}}_{u'(t)} + \underbrace{a(t) k(t) e^{-A(t)}}_{+ a'(t) u} = b(t)$$

da cui

$$k(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt$$

Quindi la soluzione particolare è $u(t) = k(t) e^{-A(t)} = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$ e infine la soluzione generale è

$$u(t) = \underbrace{k e^{-A(t)}}_{\text{viene fuori dall'omogenea}} + \underbrace{e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt}_{\text{soluzione speciale ottenuta con variazione delle costanti.}}$$

— o — o —

Esempio 1 bis $u' + tu = t^3$. L'eq. omogenea ha come soluzione

$$u(t) = k e^{-A(t)} = k e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Per trovare la soluzione particolare provo con un tentativo. Sembra ragionevole cercarla come polinomio di 2° grado

$$u(t) = at^2 + bt + c$$

Derivo $u'(t) = 2at + b$ e sostituisco:

$$\underbrace{2at + b}_{u'} + \underbrace{at^3 + bt^2 + ct}_{+tu} = t^3$$

{	$a = 1$	coeff. t^3	Sistema di 4 equazioni in 3 incognite! Ci va bene che 2 equazioni sono uguali: $a=1$ $b=0$ $c=-2$ da cui la soluzione speciale
	$b = 0$	coeff. t^2	
	$2a + c = 0$	coeff. t	
	$b = 0$	termine noto	

$$u(t) = t^2 - 2$$

cioè la stessa ottenuta con il fattore integrante.

Oss. Se invece di t^3 c'era t^2 non funzionava nulla e la sol. non era di tipo polinomiale.
— 0 — 0 —

Esempio 2 $u' + \frac{u}{t} = \sin t$ $a(t) = \frac{1}{t}$, $A(t) = \log |t|$

Fatto generale importante Per le eq. diff. lineari l'intervallo massimale di esistenza è prevedibile dalla sola equazione, ed è la più grande zona (che contiene il tempo iniziale) ed in cui sono definiti tutti i coefficienti.

Brutalmente: la sol. esiste finché può, cioè se non hanno problemi i coeff. non ha problemi nemmeno la soluzione.

Nell'esempio, se la cond. iniz. è $u(t_0) = u_0$ con $t_0 > 0$ l'int. max di esistenza è $(0, +\infty)$ ed in questo caso posso scrivere $A(t) = \log |t| = \log t$. Fattore integrante: $e^{A(t)} = t$. Moltiplico

$$tu' + u = t \sin t \quad [tu]' = t \sin t \quad \rightarrow tu(t) = \int t \sin t \, dt + c$$

$$u(t) = \frac{c}{t} + \frac{1}{t} \int t \sin t \, dt$$

— 0 — 0 —