

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 098

Titolo nota

22/01/2011

Eq. Diff. Lineari non omogenee: metodo di variazione delle costanti

Esempio $u'' + 3u' - 4u = t$ Tentativo: $u(t) = at + b$
e viene in fretta.

Alternativa: metodo di variazione delle costanti. Considero la sol. gen. dell' eq. omogenea

$$u(t) = a e^{-4t} + b e^t$$

C'è un "tentativo universale" della forma

$$u(t) = a(t) e^{-4t} + b(t) e^t$$

Così ho fatto "variare le costanti" cioè le ho sostituite con funzioni della variabile t . Lo scopo è trovare funzioni $a(t)$ e $b(t)$ in modo che $u(t)$ sia soluzione dell' eq. non omogenea. Derivo e sostituisco

$$u'(t) = a'(t) e^{-4t} - 4a(t) e^{-4t} + b'(t) e^t + b(t) e^t$$

Impongo che la parte con a' e b' si annulli, cioè

$$a'(t) e^{-4t} + b'(t) e^t = 0 \quad 1^a \text{ equazione}$$

Calcolo $u''(t)$ derivando solo i restanti 2 termini

$$u''(t) = -4a'(t) e^{-4t} + 16a(t) e^{-4t} + b'(t) e^t + b(t) e^t$$

Ora sostituisco $u''(t)$, $u'(t)$ e $u(t)$ nell' equazione diff. iniziale:

$$\begin{aligned}
 & -4a'(t)e^{-4t} + 16a(t)e^{-4t} + b'(t)e^t + b(t)e^t & u'' \\
 & -12a(t)e^{-4t} + 3b(t)e^t & + 3u' \\
 & -4a(t)e^{-4t} - 4b(t)e^t & - 4u \\
 & = t
 \end{aligned}$$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ se ne devono andare. Resta solo roba con $a'(t)$ e $b'(t)$.

$$\boxed{-4a'(t)e^{-4t} + b'(t)e^t = t} \quad 2^{\text{a}} \text{ equazione.}$$

Oss. I termini con $a(t)$ e $b(t)$ provengono dall'aver derivato e^{-4t} ed e^t , rispettivamente, quindi sono del tipo $a(t) \cdot$ quello che si ottiene mettendo e^{-4t} nell'eq. $= a(t) \cdot 0 = 0$

Mettendo insieme la 1^a equazione e la 2^a equazione otteniamo un sistema che pensiamo nelle incognite $a'(t)$ e $b'(t)$

$$\begin{cases}
 a'(t)e^{-4t} + b'(t)e^t = 0 \\
 -4a'(t)e^{-4t} + b'(t)e^t = t
 \end{cases}$$

Idea per concludere: risolvo il sistema per trovare $a'(t)$ e $b'(t)$, poi integrando calcolo $a(t)$ e $b(t)$, che infine sostituisco nella formula per $u(t)$.

Risoluzione sistema: ricavo $b'(t)$ dalla 1^a equazione $b'(t) = -a'(t)e^{-5t}$

Sostituisco nella 2^a equazione:

$$-4a'(t)e^{-4t} - a'(t)e^{-4t} = t \quad \leadsto -5a'(t)e^{-4t} = t$$

$$\rightarrow a'(t) = -\frac{1}{5}te^{4t} \quad \rightarrow b'(t) = -a'(t)e^{-5t} = \frac{1}{5}te^{-t}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Faccio le primitive: } \int t e^{4t} dt &= t \cdot \frac{1}{4}e^{4t} - \int 1 \cdot \frac{1}{4}e^{4t} dt \\
 & \quad \text{G F} \qquad \qquad \text{G F} \qquad \qquad \text{GF} \\
 &= \frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t}
 \end{aligned}$$

Quindi $a(t) = -\frac{1}{20} t e^{4t} + \frac{1}{80} e^{4t}$

$$\int t e^{-t} dt = t(-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t}) dt = -t e^{-t} + \int e^{-t} dt = -t e^{-t} - e^{-t}$$

$$b(t) = -\frac{1}{5} t e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-t}$$

Sostituzione finale: $u(t) = a(t) e^{-4t} + b(t) e^t$

$$= -\frac{1}{20} t + \frac{1}{80} - \frac{1}{5} t - \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1+4}{20} t + \frac{1-16}{80} = -\frac{1}{4} t - \frac{3}{16}$$

soluzione particolare

Soluzione generale equazione non omogenea:

$$u(t) = a e^{-4t} + b e^t - \frac{1}{4} t - \frac{3}{16} \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti}$$

Stesso esercizio con il tentativo $u'' + 3u' - 4u = t$ $u(t) = at + b$

$u'(t) = a$ $u''(t) = 0$. Sostituisco

$$3a - 4at - 4b = t$$

$$\begin{cases} -4a = 1 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases}$$

(coeff. t)

(termine noto)

$$\rightarrow a = -\frac{1}{4} \quad b = \frac{3}{4} a = -\frac{3}{16}$$

Metodo di variazione delle costanti:

→ scrivo sol. gen. dell'eq. omogenea

→ faccio un tentativo facendo variare le costanti

→ calcolo u' e impongo che i termini con a' e b' siano 0 (1ª equazione)

→ calcolo u'' tenendo conto solo dei restanti termini

→ sostituisco u'' , u' , u nell'equazione: i pezzi con a e b se ne vanno e quello che resta è la 2ª equazione in a' e b'

→ metto a sistema le 2 equazioni e calcolo $a'(t)$ e $b'(t)$

→ trovo $a(t)$ e $b(t)$ facendo le primitive

→ sostituisco nella formula per $u(t)$

Tutta la teoria vista finora si applica anche ad equazioni di ordine 1 (ovviamente lineari)

Esempio 1 $u' = 7u$ Volendo è a variabili separabili
Ma è anche lineare e omogenea

$$u' - 7u = 0 \leadsto \text{Polinomio: } x - 7 = 0 \leadsto \text{Radici: } x = 7 \\ \leadsto \text{Base: } e^{7t} \leadsto \text{Sol. generale: } u(t) = a e^{7t}$$

Esempio 2 $u' = -u + t^2 + e^{-t}$. La vedo come lineare $u' + u = t^2 + e^{-t}$
Omogenea: $u' + u = 0 \leadsto x + 1 = 0 \leadsto x = -1 \leadsto e^{-t}$
Sol. gen. eq. omog.: $u(t) = a e^{-t}$

Tentativo per la non omogenea: $u(t) = \underbrace{at^2 + bt + c}_{\text{tentativo per } t^2} + d \underbrace{t}_{\text{serve perché } e^{-t} \text{ è sol. eq. omog.}} e^{-t}$

Derivo e sostituisco: $u'(t) = 2at + b + d e^{-t} - d t e^{-t}$

$$\underbrace{2at + b + d e^{-t} - d t e^{-t}}_{u'} + \underbrace{at^2 + bt + c + d t e^{-t}}_{+u} = t^2 + e^{-t}$$

$a = 1$	coeff. t^2	$a = 1$
$2a + b = 0$	coeff. t	$b = -2$
$b + c = 0$	termine noto	$c = 2$
$d = 1$	coeff. e^{-t}	$d = 1$

Sol. gen. eq. non omogenea:

$$u(t) = a e^{-t} + t^2 - 2t + 2 + t e^{-t}$$

Osservazione $u'' + u = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i$

$$\rightarrow u(t) = a \cos t + b \sin t$$

$$u'' - u = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow u(t) = a e^t + b e^{-t}$$

Ma anche $u(t) = a \cosh t + b \sinh t$