

Eq. Diff. Lineari non omogenee

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t)$$

Sol. generale: $u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{\text{sol. gen. eq. omog.}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{sol. qualunque eq. non omog.}}$

1° caso Se i coeff. a_i sono costanti e $f(t) = e^{\alpha t}$, allora conviene cercare una solus. particolare del tipo $u(t) = \lambda e^{\alpha t}$, dove α è lo stesso α della $f(t)$ data e λ è un coeff. incognito. Questo tentativo funziona TRANNE quando α è una radice del polinomio caratteristico associato all'eq. omogenea. In questo caso, se m è la molteplicità della radice α , il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t^m e^{\alpha t}$

2° caso Coeff. a_i costanti e $f(t) = \text{polinomio}$. Il tentativo è un polinomio dello stesso grado a coeff. incogniti

Esempio $u'' + 3u' - 4u = t^2$

Omogenea: $u'' + 3u' - 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (x+4)(x-1) = 0$

$\rightsquigarrow$ radici: $x = -4$ e $x = 1 \rightsquigarrow$ base: e^{-4t}, e^t

$\rightsquigarrow$ sol. gen. eq. omog.: $u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Ora cerco una sol. dell'eq. NON omogenea del tipo $u(t) = at^2 + bt + c$, dove a, b, c sono coeff. da determinare.

Calcolo le derivate: $u'(t) = 2at + b$, $u''(t) = 2a$. Sostituisco:

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{6at + 3b}_{+3u'} - \underbrace{4at^2 - 4bt - 4c}_{-4u} = t^2$$

Uguaglio i coefficienti:

$$\begin{cases} -4a = 1 & (\text{coeff. } t^2) \\ 6a - 4b = 0 & (\text{coeff. } t) \\ 2a + 3b - 4c = 0 & (\text{termine noto}) \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = \frac{3}{2}a = -\frac{3}{8}$$

$$c = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = -\frac{1}{8} - \frac{3}{32} = -\frac{7}{32}$$

In conclusione una soluzione dell'eq. non omogenea è

$$u(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{7}{32}$$

Quindi tutte le soluzioni dell'eq. non omogenea (sol. gen.) sono date dalla formula

$$u(t) = \underbrace{a e^{-4t}}_{=0} + \underbrace{b e^t}_{=0} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{7}{32}$$

Questo modo di procedere funziona se non ci sono polinomi (anche costanti) tra le soluzioni dell'eq. omogenea, cioè se e solo se 0 non è radice del polinomio caratteristico.

Come prima, se 0 è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico, il tentativo va moltiplicato per t^m .

Esempio $u'' + 3u'' = t^2$

Omogenea: $u'' + 3u'' = 0 \rightsquigarrow x^4 + 3x^2 = 0$, $x^2(x^2 + 3) = 0$

$\rightsquigarrow$ radici: $x=0$ (mult. 2), $x = \pm \sqrt{3}i$

$\rightsquigarrow$ base: $1, t, \cos(\sqrt{3}t), \sin(\sqrt{3}t)$

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = a + bt + c \cos(\sqrt{3}t) + d \sin(\sqrt{3}t)$

Cerco soluzione dell'eq. non omogenea. La cerco del tipo

$$u(t) = \underbrace{t^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{perché } 0 \text{ è} \\ \text{radice di mult. } 2}} \underbrace{(at^2 + bt + c)}_{\substack{\downarrow \\ \text{generico polinomio di grado 2} \\ \text{perché } f(t) \text{ è di 2° grado}}}$$

quindi $u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Derivo e sostituisco

$$u'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct, \quad u''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$$

$$u'''(t) = 24at + 6b, \quad u^{(4)}(t) = 24a$$

$$\underbrace{24a}_{u^{(4)}} + \underbrace{36at^2 + 18bt + 6c}_{3u''} = t^2 \quad \begin{cases} 36a = 1 & (\text{coeff. } t^2) \\ 18b = 0 & (\text{coeff. } t) \\ 24a + 6c = 0 & (\text{term. noto}) \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{36} \quad b = 0 \quad c = -4a = -\frac{1}{9}$$

Sol. gen. eq. non omog.:

$$u(t) = a + bt + c \cos(\sqrt{3}t) + d \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{36}t^4 - \frac{1}{9}t^2$$

Sempre fare la verifica!!!!

Oss. Si poteva provare anche un generico polinomio di grado 4
 $u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$. Si trovavano a, b, c come sopra, ma nessuna condizione su d ed e . Infatti quelli sono parametri liberi.

— o — o —

3° caso Coeff. ai costanti e $f(t)$ di tipo trigonometrico

Esempio $u'' + 3u' - 4u = \cos(3t)$ Omog: $u(t) = ae^{-4t} + be^t$

Cerco soluzioni della non omogenea di tipo

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t)$$

Calcolo le derivate:

$$u'(t) = -3a \sin(3t) + 3b \cos(3t), \quad u''(t) = -9a \cos(3t) - 9b \sin(3t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-9a \cos(3t) - 9b \sin(3t)}_{u''(t)} + \underbrace{-9a \sin(3t) + 9b \cos(3t)}_{+3u'(t)} - \underbrace{4a \cos(3t) - 4b \sin(3t)}_{-4u(t)} = \cos(3t)$$

$$\begin{cases} -9a + 9b - 4a = 1 & (\text{coeff. cos}) \\ -9b - 9a - 4b = 0 & (\text{coeff. sin}) \end{cases} \quad \begin{cases} -13a + 9b = 1 \\ -9a - 13b = 0 \end{cases}$$

da qui si conclude

— o — o —

In generale: se il secondo membro contiene termini del tipo $\sin(\omega t)$ oppure $\cos(\omega t)$, il tentativo da fare è

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

(sempre tentativo doppio, con a e b incogniti)

Non funziona quando le stesse cose sono già sol. dell'eq. omogenea, cioè quando $x = \pm \alpha i$ è radice del polinomio caratteristico.

Se $x = \pm \alpha i$ sono radici di mult. m , allora il tentativo da fare va moltiplicato per t^m .

CASI MISTI Se $f(t) = p(t)e^{\alpha t}$, $p(t)\cos(\alpha t)$, $p\sin(\alpha t)$ con $p(t)$ polinomio (e ovviamente gli αi sono costanti), allora il tentativo da fare è

$$u(t) = q(t)e^{\alpha t} \quad \text{oppure} \quad \cos / \sin$$

dove $q(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $p(t)$.

Se $f(t) =$ somma di un po' di tutto, allora basta risolvere con un pezzo per volta e poi sommare tutto.

Motivo:

$$\text{se } \sum_{i=0}^k a_i u^{(i)} = f(t) \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^k a_i v^{(i)} = g(t)$$

e pongo $w = u + v$, allora

$$\sum_{i=0}^k a_i w^{(i)} = f(t) + g(t)$$