

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 096

.....
Titolo nota

20/01/2011

Idea del perché funziona il metodo per trovare la base via radici del polinomio caratteristico.

Devo trovare soluzioni dell'equazione $au'' + bu' + cu = 0$.

È ragionevole cercare di tipo esponenziale. Provo con $u(t) = e^{\lambda t}$.

Sostituisco: $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, quindi

$$a \lambda^2 e^{\lambda t} + b \lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 ; e^{\lambda t} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0$$

Questa espressione si annulla $\Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Leftrightarrow \lambda$ è una radice del polinomio caratteristico.

Se ci sono 2 radici reali distinte ho trovato 2 soluzioni non multiple l'una dell'altra e ho finito.

Idea per il caso in cui le radici sono $\alpha \pm i\beta$. Vorrei scrivere

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

da cui è ragionevole aspettarsi oggetti del tipo $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$
 $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

1-0-1

Se l'equazione è di ordine k , servono k elementi della base, che saranno prodotti dalle k radici (contate con molteplicità) del polinomio caratteristico. La procedura è

- una radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità 1 produce $\rightarrow e^{\lambda t}$
- " " " " " produce m elementi:
 $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$
- una coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ (con $\beta \neq 0$) di molteplicità 1 produce 2 elementi: $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- se $\alpha \pm i\beta$ hanno molteplicità m , producono $2m$ elementi:
 $e^{\alpha t} \cos(\beta t), t e^{\alpha t} \cos(\beta t), \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t)$
 $e^{\alpha t} \sin(\beta t), t e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$

— 〇 — 〇 —

CASO NON OMOGENEO

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t) \leftarrow \text{diversa da } 0$$

Fatto fondamentale: Se u e v sono due soluzioni dell'equazione NON omogenea, allora la loro differenza $w = u - v$ è una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente

Dim.: u soluzione vuol dire $\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t)$

v soluzione vuol dire $\sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} = f(t)$

$$\begin{aligned} \text{Allora } \sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)} &= \sum_{i=0}^k a_i(t) (u^{(i)} - v^{(i)}) \\ &= \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} - \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} \\ &= f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

Conseguenza operativa. La formula generale per la soluzione di un'eq. non omogenea è del tipo

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{\text{soluzione generale dell'eq. omogenea}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{soluzione QUALUNQUE dell'equazione NON OMOG.}}$$

Significato della formula Per trovare TUTTE le soluzioni di una equazione non omogenea basta saper trovare

- tutte le soluzioni della corrispondente eq. omogenea
- una soluzione qualunque della non omogenea.

Dim.: Sia $\bar{u}(t)$ una soluzione avuta in qualche modo
Sia $u(t)$ un'altra soluzione. Allora
 $u(t) - \bar{u}(t)$ è soluzione dell'eq. omogenea, quindi si scrive
come comb. lineare di $u_1(t), \dots, u_k(t)$

— o — o —

Quindi l'unico obiettivo è trovare una soluzione, in qualunque modo, dell'eq. non omogenea.

Due metodi: $\rightarrow$ metodo di variazione delle costanti: molti calcoli da fare, ma standard, e funziona sempre (ottimo per un computer)

$\rightarrow$ provare a indovinare (comodo quando funziona)

Esempio 1 $u'' - 5u' + 6u = e^{4t}$. Vediamo la corrispondente omog.:

$$u'' - 5u' + 6u = 0 \leadsto x^2 - 5x + 6 = 0 \leadsto \text{Radici: } x=2 \text{ e } x=3$$

$$\leadsto \text{base: } e^{2t}, e^{3t} \leadsto \text{sol. gen. eq. omogenea: } u(t) = a e^{2t} + b e^{3t}.$$

Devo trovare una soluzione della non omogenea. La cerco del tipo $u(t) = \lambda e^{4t}$ con un coefficiente λ incognito. Calcolo le derivate:
 $u'(t) = 4\lambda e^{4t}$, $u'' = 16\lambda e^{4t}$. Sostituisco:

$$\underbrace{16\lambda e^{4t}}_{u''} - \underbrace{20\lambda e^{4t}}_{-5u'} + \underbrace{6\lambda e^{4t}}_{+6u} = e^{4t}$$

Semplificando ottengo $2\lambda = 1$, cioè $\lambda = \frac{1}{2}$. Sol. speciale: $u(t) = \frac{1}{2} e^{4t}$

Soluzione generale equazione non omogenea:

$$u(t) = \underbrace{a e^{2t} + b e^{3t}}_{\text{sol. eq. omog.}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{4t}}_{\text{sol. speciale}}$$

Se abbiamo delle condizioni iniziali, possiamo determinare a e b .

Ad esempio se abbiamo $u(0) = 2$, $u'(0) = 7$, calcolo

$$u'(t) = 2a e^{2t} + 3b e^{3t} + 2e^{4t} \quad \text{e impongo}$$

$$\begin{cases} a + b + \frac{1}{2} = 2 \\ 2a + 3b + 2 = 7 \end{cases}$$

$$u(0) = 2$$

$$u'(0) = 7$$

Sistema lineare in 2 variabili
che si risolve facilmente.

— o — o —

Esempio 2 $u'' - 5u' + 6u = e^{2t}$ la parte omog. è come prima

Cerco una sol. speciale del tipo $u(t) = \lambda e^{2t}$.

Calcolo le derivate: $u'(t) = 2\lambda e^{2t}$, $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$

Sostituisco:

$$4\lambda e^{2t} - 10\lambda e^{2t} + 6\lambda e^{2t} = e^{2t}$$

$$0 = e^{2t}$$

$$u'' - 5u' + 6u$$

GUAIO!!

Bella scoperta! e^{2t} è sol. dell' omogenea, quindi sostituendo viene per forza 0.

Nuovo tentativo: provo con una t davanti: $u(t) = \lambda t e^{2t}$

Calcolo: $u'(t) = \lambda e^{2t} + 2\lambda t e^{2t}$, $u''(t) = 2\lambda e^{2t} + 2\lambda e^{2t} + 4\lambda t e^{2t}$

Sostituisco:

$$\underbrace{4\lambda e^{2t} + 4\lambda t e^{2t}}_{u''} - \underbrace{5\lambda e^{2t} - 10\lambda t e^{2t}}_{-5u'} + \underbrace{6\lambda t e^{2t}}_{+6u} = e^{2t}$$

$$-\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = -1$$

Sol. generale: $u(t) = a e^{2t} + b e^{3t} - \underbrace{t e^{2t}}_{\text{sol. speciale}}$

Osservazione: i termini con la t sono uguali a t moltiplicato i termini del tentativo precedente perché arrivano dal derivare l' esponenziale. Se se ne andavano prima, se ne vanno anche ora.

— o — o —