

Equazioni differenziali lineari (teoria generale)

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t) \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{L'equazione è omogenea se } f(t) \equiv 0 \\ \downarrow \text{coeff. dell'equazione (funzioni di } t) \end{array}$$

CASO OMOGENEO Fatti importanti

- ① Date 2 soluzioni u e v di un'eq. omogenea, allora $w = u + v$ è ancora una soluzione della stessa equazione

Dim.: essendo u soluzione abbiamo che $\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = 0$

" v " " " $\sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} = 0$

Ora considero la w . Chiaramente $w^{(i)} = u^{(i)} + v^{(i)}$, quindi

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)} = \sum_{i=0}^k a_i(t) (u^{(i)} + v^{(i)}) = \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} + \sum_{i=0}^k a_i(t) v^{(i)} = 0$$

È essenziale che l'equazione sia lineare e omogenea

- ② Data una soluzione u e data una costante $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $w = \alpha u$ è ancora una soluzione

Dim.: basta osservare che $w^{(i)} = \alpha u^{(i)}$, quindi

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) w^{(i)} = \sum_{i=0}^k a_i(t) \alpha u^{(i)} = \alpha \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = 0$$

È fondamentale la linearità.

Altro modo di dire ① + ②: L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare è uno spazio vettoriale.

Conseguenza di ① + ②. Se abbiamo $u_1, u_2, \dots, u_n$ che sono soluzioni e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ che sono numeri, allora

$$W = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad (\text{combinazione lineare})$$

è a sua volta una soluzione della stessa equazione.

③ Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione k pari all'ordine dell'equazione, cioè la soluzione generale è della forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t)$$

sol. gen. eq.
diff. OMOGENEA

dove $c_1, \dots, c_k$ sono costanti arbitrarie (k parametri liberi) e $u_1(t), \dots, u_k(t)$ sono soluzioni speciali (cioè gli elementi di una base)

Operativamente: per trovare la soluzione generale di un'eq. diff. lineare omogenea basta trovare le sol. speciali $u_1(t), \dots, u_k(t)$.

Idea del perché funziona Sia $u_1(t)$ la soluzione del problema di Cauchy. Sia $u_2(t)$ la soluzione di

$$\begin{cases} \text{Equazione} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Equazione} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u''(0) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

In generale considero $u_i(t)$ come la soluzione dell'equazione con dato iniziale $0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } i\text{-esima}}}{1}, 0, \dots, 0$

Una volta che conosco $u_1(t), \dots, u_k(t)$ so risolvere il problema per ogni scelta dei dati iniziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equazione} \\ u(0) = \alpha_1 \\ u'(0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(0) = \alpha_k \end{array} \right.$$

La soluzione sarà

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \dots + \alpha_k u_k(t).$$

Infatti risolve l'equazione e quando calcolo le derivate in $t=0$ si annullano tutti gli addendi tranne 1.

Questo dice che bastano k soluzioni speciali per avere la sol. generale.

— o — o —

Come ottenere una base. C'è un algoritmo che funziona nel caso di coeff. costanti

Equazioni di ordine 2 $au'' + bu' + cu = 0$

Polinomio caratteristico: $ax^2 + bx + c = 0$ Calcolo le radici

Caso $\Delta > 0$ Ci sono 2 radici reali distinte: λ, μ

La base è del tipo $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$, quindi la soluzione generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

$\nwarrow$ $\nearrow$
 costanti reali arbitrarie

Caso $\Delta = 0$ C'è una radice reale λ di molteplicità 2. Una base è $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$, quindi la sol. generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}.$$

Osservazione Le funzioni $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ sono lin. indipendenti perché il fattore moltiplicativo dipende da t e non è un numero.

Caso $\Delta < 0$ Ci sono 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Una possibile base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Quindi la soluzione generale è della forma

$$u(t) = a e^{\alpha t} \cos(\beta t) + b e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Esempio 1 $u'' + 3u' - 4u = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x_{1,2} = -4, 1$

$\rightarrow$ base: e^{-4t}, e^t

$\rightarrow$ Sol. generale $u(t) = a e^{-4t} + b e^t$

Esempio 2 $u'' + 4u' + 4u = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0, (x+2)^2 = 0$
 $\rightarrow x = -2$ è radice di molteplicità 2
 $\rightarrow$ Base: $e^{-2t}, t e^{-2t}$
 $\rightarrow$ Sol. generale: $u(t) = a e^{-2t} + b t e^{-2t}$

Esempio 3 $u'' + 6u' + 13u = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 13 = 0$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i$$

Base: $e^{-3t} \cos(2t), e^{-3t} \sin(2t)$

Sol. generale: $u(t) = a e^{-3t} \cos(2t) + b e^{-3t} \sin(2t)$

Esempio 4 $u'' + 5u' = 0 \rightsquigarrow x^2 + 5x = 0 \quad x(x+5) = 0$

Radici: $x=0$ e $x=-5$

Base: $e^{0t} = 1, e^{-5t}$

Sol. generale $u(t) = a + b e^{-5t}$

Esempio 5 $u'' - 9u = 0 \rightsquigarrow x^2 - 9 = 0, x^2 = 9, x = \pm 3$

Base: e^{3t}, e^{-3t} Sol. generale: $u(t) = a e^{3t} + b e^{-3t}$

Esempio 6 $u'' + 9u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 9 = 0, x^2 = -9, x = \pm 3i$

Complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha=0$ e $\beta=3$

Base: $\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^{0t}} \cos(3t), \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^{0t}} \sin(3t)$

Sol. generale: $u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t).$
 $\text{---} \text{---} \text{---}$