

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 094

Titolo nota

19/01/2011

Eq. Diff. a variabili separabili

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^3 e^{2t} \\ u(0) = 5 \end{cases}$

① Separare: $\frac{du}{dt} = u^3 \cdot e^{2t}$

$$\frac{du}{u^3} = e^{2t} dt$$

② Integrare $\int \frac{du}{u^3} = \int e^{2t} dt$; $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{1}{2} e^{2t} + c$

③ Ricavare $\frac{1}{u^2} = -e^{2t} + c$ $\leftarrow$ sarebbe $-2c$, ma è lo stesso

$$u^2 = \frac{1}{c - e^{2t}}$$

$$u(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{c - e^{2t}}}$$

In questi casi prendo il segno + o il segno - in modo da ottenere la condizione iniziale, in questo caso con il segno +.

$$u(t) = \sqrt{\frac{1}{c - e^{2t}}}$$

soluzione generale che va bene per dati iniziali positivi.

④ Determinare c: $u(0) = \sqrt{\frac{1}{c-1}} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{c-1} = 25 \Leftrightarrow$

$$c-1 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow c = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$$

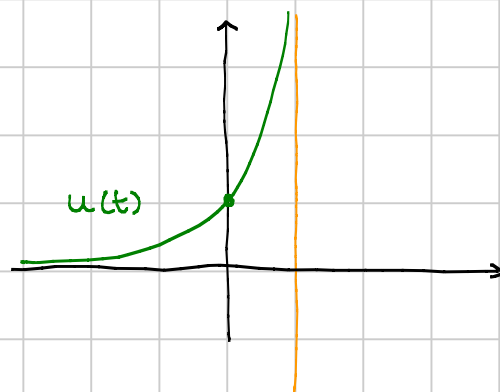
Sol. problema di Cauchy: $u(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{26}{25} - e^{2t}}} = \frac{5}{\sqrt{26 - 25e^{2t}}}$

⑤ Verifica: fare ⑥ Studio: problemi per $25e^{2t} = 26$

$$\Leftrightarrow e^{2t} = \frac{26}{25} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \log \frac{26}{25} > 0$$

Quindi la soluzione ha blow-up (il denominatore si annulla) per

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{26}{25}$$



Esempio 2 $\begin{cases} u' = u \log u \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ L'eq. diff. è autonoma, e da posso vedere come variabili separabili

① Separare: $\frac{du}{dt} = u \log u$; $\frac{du}{u \log u} = dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u \log u} = \int dt$; $\log |\log u| = t + c$

③ Ricavare: $\log |\log u| = t + c \Rightarrow |\log u| = e^{t+c}$
 $\log u = e^{t+c} \Rightarrow u = e^{e^{t+c}}$
 ↑ sempre positivo, quindi nessun problema di valore assoluto

Problema di percorso: quando risolvo $|A| = 3$ ottengo $A = \pm 3$

Quindi quando risolvo $|\log u| = e^{t+c}$ ottengo

$\log u = \pm e^{t+c}$ e quindi la soluzione è

$$u(t) = e^{\pm e^{t+c}}$$

dove il segno va scelto guardando la condizione iniziale.

④ Determinare c $u(0) = e^{\pm e^c} = \frac{1}{2}$, quindi $\pm e^c = \log \frac{1}{2} = -\log 2$

Quindi devo scegliere il segno -

$$-e^c = -\log 2 \Leftrightarrow e^c = \log 2$$

Soluzione problema di Cauchy: $u(t) = e^{-e^{t+c}} = e^{-e^t \cdot e^c} = e^{-\log 2 \cdot e^t} = e^{-\log 2 \cdot e^t}$

Questa è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u t^2 \\ u(0) = -6 \end{cases}$ ① Separare: $\frac{du}{dt} = u \cdot t^2$; $\frac{du}{u} = t^2 dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt$

$$\log |u| = \frac{1}{3} t^3 + c$$

③ Ricavare:

$$|u| = e^{\frac{1}{3}t^3 + c}$$

$$u(t) = \pm e^{\frac{1}{3}t^3 + c}$$

④ Determino c: $u(0) = \pm e^c = -6$

Quindi scelgo il segno $-$ e ottengo $-e^c = -6$, $e^c = 6$
e volendo $c = \log 6$.

Soluzione del problema di Cauchy

$$u(t) = -e^{\frac{1}{3}t^3 + \log 6} = -e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot e^{\log 6} = -6e^{\frac{1}{3}t^3}$$

Scorciatoia: sono arrivato alla formula generale

$$u(t) = \pm e^{\frac{1}{3}t^3 + c} = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$$

sarebbe una costante > 0 , ma potendo scegliere
il segno $\pm$ è una costante qualunque ($\neq 0$)

$$= k e^{\frac{1}{3}t^3}$$

↑
costante qualunque

Così ottengo come soluzione generale $u(t) = k e^{\frac{1}{3}t^3}$. Quando
vado a ricavare k trovo $u(0) = k = -6$ senza passare dai
logaritmi.

Osservazione La scrittura $u(t) = \pm e^{\frac{1}{3}t^3 + c}$ non permette di ottenere
la condizione iniziale $u(0) = 0$, che è invece facilmente otteni-
bile con la scrittura $u(t) = k e^{\frac{1}{3}t^3}$ (basta $k=0$)

Esempio 4

$$\begin{cases} u' = \arctan t \cdot \log u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

① Separare

$$\frac{du}{dt} = \arctan t \cdot \log u$$

$$\frac{du}{\log u} = \arctan t \, dt$$

② Integrare

$$\int \frac{du}{\log u} \text{ e non si sa fare...}$$

Però la soluzione è $u(t) \equiv 1$ (la cosa importante è che $\log 1 = 0$)

Fatto generale: quando ho l'equazione $\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

ho che la soluzione è costante $\Leftrightarrow g(u_0) = 0$.

Esempio 5 $\begin{cases} u' = u^4 \sin t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Domanda: per quali α ho esistenza glob. nel futuro.

$$\frac{du}{dt} = u^4 \sin t; \quad \frac{du}{u^4} = \sin t \, dt; \quad \int \frac{du}{u^4} = \int \sin t \, dt$$

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = -\cos t + C; \quad \frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = \cos t + C; \quad \frac{1}{u^3} = 3 \cos t + C$$

$$u^3 = \frac{1}{3 \cos t + C}$$

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{3 \cos t + C}} \quad \text{Sol. generale}$$

$$\text{Calcolo } c \text{ in funzione di } \alpha: u(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{3+C}} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{3+C} = \alpha^3$$

$$\Leftrightarrow 3+C = \frac{1}{\alpha^3} \Leftrightarrow C = \frac{1}{\alpha^3} - 3$$

Tornando alla sol. generale, si ha esistenza globale $\Leftrightarrow$ il denominatore è sempre $\neq 0$. Il denominatore si annulla quando $3 \cos t + C = 0$, cioè $\cos t = -\frac{C}{3}$. Se voglio che non si annulli, deve essere

$$-\frac{C}{3} > 1 \quad \text{oppure} \quad -\frac{C}{3} < -1, \quad \text{cioè} \quad C < -3 \quad \text{oppure} \quad C > 3$$

Questo in α vuol dire che

$$\frac{1}{\alpha^3} - 3 < -3 \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\alpha^3} - 3 > 3$$

$$\frac{1}{\alpha^3} < 0 \quad \text{"} \quad \frac{1}{\alpha^3} > 6$$

$$\alpha < 0 \quad \text{"} \quad \alpha^3 > \frac{1}{6} \quad \alpha > \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$$

— 0 — 0 —