

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 093

Titolo nota

19/01/2011

Eq. Diff. a variabili separabili

$$u' = f(t)g(u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

Procedura: ① Separare

② Integrare

③ Ricavare

④ Determinare c

⑤ Verifica! (sia dell'eq., sia del dato iniziale)

⑥ Studio della soluzione

} soluzione generale dell'eq. diff.

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^{2t} \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

① Separare Scrivo u' come $\frac{du}{dt}$: $\frac{du}{dt} = u^2 \cdot e^{2t}$

Tutte le u a sx, tutte le t a dx : $\frac{du}{u^2} = e^{2t} \cdot dt$

② Integrare : a sx rispetto ad u , a dx rispetto a t :

$$\int \frac{du}{u^2} = \int e^{2t} dt \quad ; \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{2} e^{2t} + c \quad \leftarrow \text{parametro libero}$$

③ Ricavare : u in funzione di t : $+\frac{1}{u} = -\frac{1}{2} e^{2t} + c \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{mettere } +c \text{ o } -c \\ \text{è la stessa cosa} \end{matrix}$

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{2} e^{2t} + c} = \frac{2}{c - e^{2t}}$$

$$u(t) = \frac{2}{c - e^{2t}}$$

soluzione generale dell'eq. diff.

Con i primi 3 passaggi si arriva alla soluzione generale per di

→ sapere fare le primitive

→ sapere ricavare u in funzione di t .

④ Determinare c imponendo il dato iniziale $u(0) = 5$

$$u(0) = \frac{2}{c-1} = 5 \Leftrightarrow 2 = 5c - 5 \Leftrightarrow c = \frac{7}{5}$$

Soluzione del problema di Cauchy: $u(t) = \frac{2}{\frac{7}{5} - e^{2t}} = \frac{10}{7 - 5e^{2t}}$

⑤ Verifica: condizione iniziale $u(0) = \frac{10}{7-5} = 5$ ok.

$$\begin{aligned} \text{Eq. Diff. : } u'(t) &= - \frac{10}{(7-5e^{2t})^2} (-10e^{2t}) = \frac{10^2}{(7-5e^{2t})^2} \cdot e^{2t} \\ &= [u(t)]^2 \cdot e^{2t}. \end{aligned}$$

⑥ Studio della soluzione: $u(t)$ è definita quando $5e^{2t} \neq 7$,
 $e^{2t} \neq \frac{7}{5}$ $t \neq \frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$. La zona di definizione è quindi
fatta da 2 pezzi.

Intervallo massimale di esistenza = pezzo che contiene il tempo iniziale
 $t=0 = (-\infty, \underbrace{\frac{1}{2} \log \frac{7}{5}}_{>0})$

$$\text{Tempo di vita} = \frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$$

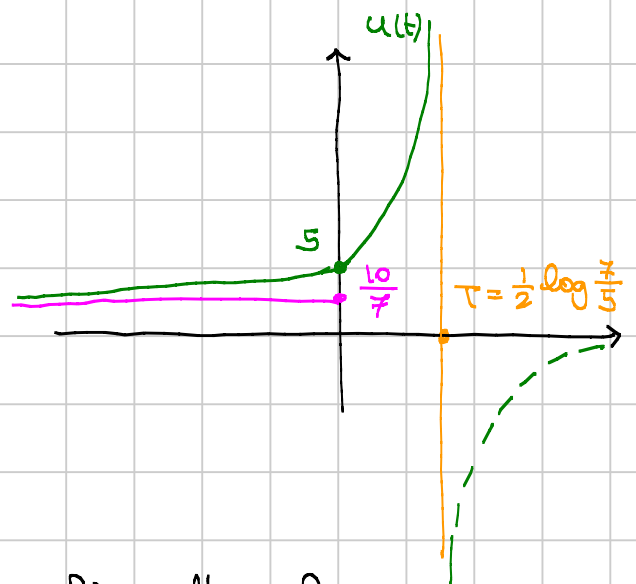
La soluzione ha blow-up per
 $T = \frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$ in quanto

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{10}{7-5e^{2t}} = \left[\frac{10}{0^+} \right] = +\infty$$

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 e^{2t} \\ u(0) = -3 \end{cases}$ Come prima fino alla sol. gen.
 $u(t) = \frac{2}{c - e^{2t}}$

④ Determino c: $u(0) = \frac{2}{c-1} = -3 \Leftrightarrow 2 = -3c + 3 \Leftrightarrow 3c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$

Sol. pbm. Cauchy: $u(t) = \frac{2}{\frac{1}{3} - e^{2t}} = \frac{6}{1 - 3e^{2t}}$

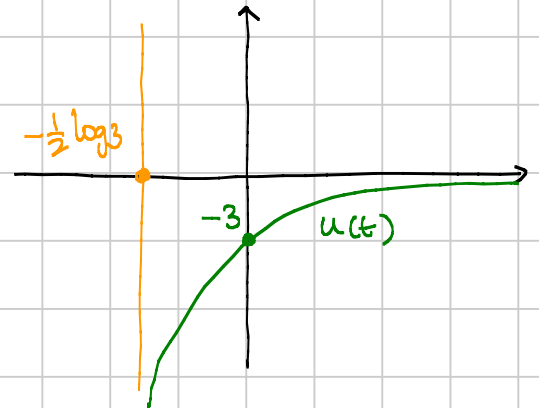


⑤ Verifica! ⑥ Studio: zona di definizione $1 - 3e^{2t} \neq 0$
 $3e^{2t} \neq 1 \Leftrightarrow e^{2t} \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow t \neq \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \log 3$

Intervallo massimale di esistenza: $(-\frac{1}{2} \log 3, +\infty)$

Si ha quindi esistenza globale nel futuro.

Nel passato la soluzione ha blow-up per $t = -\frac{1}{2} \log 3$



— 0 — 0 —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 e^{2t} \\ u(0) = 0 \end{cases}$ Come prima fino a $u(t) = \frac{2}{c - e^{2t}}$

④ Determinare c: $u(0) = \frac{2}{c-1} = 0$ che è impossibile!

Tuttavia il teo. di esistenza ed unicità ci dice che deve esserci una soluzione unica. In questo caso la soluzione è la funzione costante $u(t) \equiv 0$ (definita globalmente)

Esempio 4 $\begin{cases} u' = u^2 e^{2t} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Per quali valori di α la soluzione ha esistenza globale nel futuro?

Come sempre fino a $u(t) = \frac{2}{c - e^{2t}}$. Ora determino c in funzione di α

$$u(0) = \frac{2}{c-1} = \alpha \Leftrightarrow 2 = \alpha c - \alpha \Leftrightarrow \alpha c = \alpha + 2 \Leftrightarrow c = \frac{\alpha + 2}{\alpha}$$

Soluzione p.b.m. Cauchy: $u(t) = \frac{2}{\frac{\alpha+2}{\alpha} - e^{2t}} = \frac{2\alpha}{\alpha+2 - \alpha e^{2t}} = \frac{2\alpha}{2 + \alpha(1 - e^{2t})}$

Oss. Funziona anche per $\alpha = 0$.

Questa è definita per $2 + \alpha(1 - e^{2t}) \neq 0$ $2 + \alpha - \alpha e^{2t} \neq 0$

$$e^{2t} \neq \frac{2+d}{2}$$

$$2t \neq \log \frac{2+d}{2}$$

$$t \neq \frac{1}{2} \log \frac{2+d}{2}$$

La soluzione è globale $\Leftrightarrow$ l'asintoto verticale è per t negativi

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log \frac{2+d}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{2+d}{2} < 1 \text{ e da qui in poi è una disequazione...}$$

— o — o —

Idea del perché funziona la procedura. So che una soluzione esiste per il teorema generale. La soluzione verifica $u'(t) = f(t) \cdot g(u(t))$. Divido per $g(u(t))$. Ottengo

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t) \quad \forall t \in \text{zona di def. di } u.$$

Integro a dx e sinistra nell'intervallo $[t_0, t]$

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

↓

$$F(t) - F(t_0)$$

dove F è primitiva di f .

pongo $y = u(s)$, quindi $dy = u'(s) ds$.

Quando $s = t_0$ ho che $y = u(t_0) = u_0$ dato iniziale

" $s = t$ ho che $y = u(t)$.

Quindi il 1° integrale diventa

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{g(y)} dy = F(t) - F(t_0)$$

Chiamo $\tilde{G}$ una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$ e ottengo

$$\tilde{G}(u(t)) - \tilde{G}(u_0) = F(t) - F(t_0) \text{ e infine}$$

$$\tilde{G}(u(t)) = F(t) + \underbrace{\tilde{G}(u_0) - F(t_0)}_C$$

$\uparrow$ primitiva di $\frac{1}{g}$ $\uparrow$ primitiva di f

Oss. Quando abbiamo diviso senza denomin. $\neq 0$ (caso sol. costante)