

Vita e morte della soluzione

Operativamente: $\rightarrow$ viene dato un problema di Cauchy

$\rightarrow$ guardando la sola eq. diff. si trova la soluzione generale, dipendente da tanti parametri quanto è l'ordine dell'equazione

$\rightarrow$ guardando le sole cond. iniziali si determinano i valori dei parametri e si trova LA (unica) sol. del problema di Cauchy

$\rightarrow$ si studia la funzione ottenuta: intervallo massimale di esistenza, tempo di vita, eventuali BLOW-UP o BREAK-DOWN.

Nella fase 2 entrano in gioco le tecniche di risoluzione, diverse a seconda dei 3 casi che saranno trattati.

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$

L'equazione è autonoma del 1° ordine, quindi a variabili separabili.

La procedura risolutiva produce la famiglia di soluzioni

$$u(t) = \frac{1}{c-t} \quad \left(\text{o analogamente } u(t) = -\frac{1}{c+t} : \text{sono la stessa cosa!} \right)$$

Determino c usando la condizione iniziale: impongo $u(0) = 5$

$$u(0) = \frac{1}{c} = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{5}. \text{ Quindi LA soluzione del problema di Cauchy è}$$

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{5} - t} = \frac{5}{1 - 5t}$$

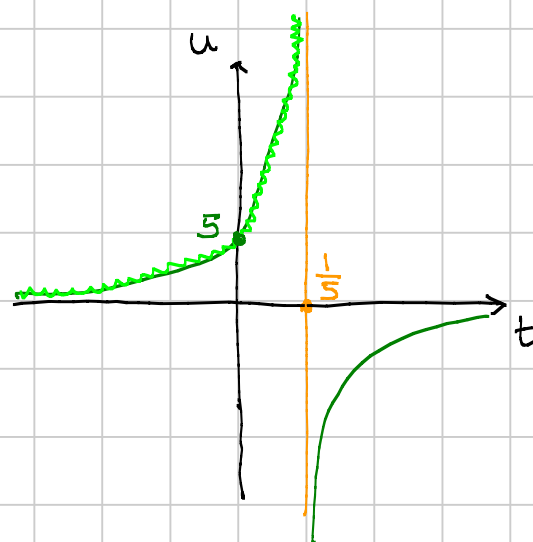
Consiglio: verificare la soluzione.

Eq. Diff. $u'(t) = 5 \left(-\frac{1}{(1-5t)^2} \right) \cdot (-5) = \frac{25}{(1-5t)^2} = [u(t)]^2$ ok

Cond. iniz. $u(0) = \frac{5}{1} = 5$ ok.

Vado a studiare la soluzione $u(t) = \frac{5}{1-5t}$

Intervallo massimale di esistenza: è per definizione il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale.



L'insieme di definizione di $u(t)$ è $t \neq \frac{1}{5}$ ed è fatto di 2 pezzi: $(-\infty, \frac{1}{5})$, $(\frac{1}{5}, +\infty)$. L'intervallo massimale di esistenza è $(-\infty, \frac{1}{5})$.

Tempo di vita (nel futuro) = sup dell'intervallo massimale di esistenza

Nell'esempio è $T = \frac{1}{5}$ (in inglese LIFE SPAM)

In altre parole, della soluzione interessa solo il ramo di grafico che passa per la condizione iniziale.

Interpretazione "mondo reale": l'eq. diff. è un modello di un fenomeno fisico, in $t = \frac{1}{5}$ è successo qualcosa e il modello perde di validità.

Calcolato il tempo di vita ci sono 2 possibilità:

- $T = +\infty$: in questo caso si dice che il problema di Cauchy ha esistenza globale nel futuro (esiste per sempre dal tempo iniziale in poi)
- $T < +\infty$: in questo caso si dice che la soluzione "muore" al tempo T e si va a vedere il tipo di problema. Si ha

BLOW-UP se $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm\infty$ (nell'esempio la soluzione ha blow-up per $t = \frac{1}{5}$)

BREAK-DOWN se non c'è blow-up, ma $u(t)$ esce dalla zona in cui è definito il secondo membro dell'equazione. Di solito accade (ma non necessariamente) che $\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm\infty$ (il break down è un blow-up della derivata)

(Per farsi un'idea, se al secondo membro c'è un termine del tipo $\sqrt{u}$ o $\log u$, si ha break-down quando u diventa uguale a 0)

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = -5 \end{cases}$ Sol. generale: $u(t) = \frac{1}{c-t}$

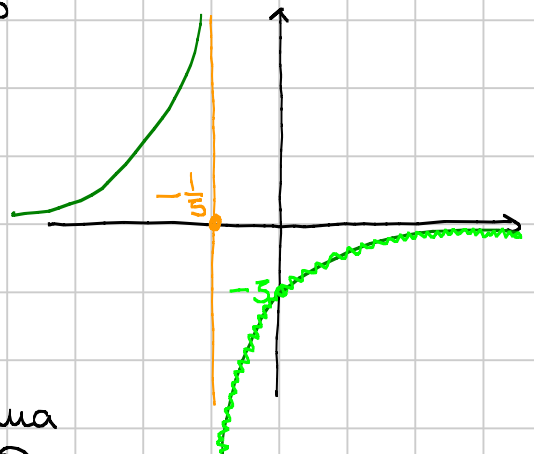
Calcolo c : $u(0) = \frac{1}{c} = -5 \Rightarrow c = -\frac{1}{5}$

Soluzione del problema di Cauchy: $u(t) = \frac{1}{-\frac{1}{5}-t} = -\frac{5}{1+5t}$

Verifica eq. diff. + cond. iniziale: FARE !!

Studio: definita per $t \neq -\frac{1}{5}$, quindi l'intervallo massimale di esistenza è $(-\frac{1}{5}, +\infty)$ ed il tempo di vita è $T = +\infty$, quindi si ha esistenza globale nel futuro

Volendo, potremmo dire che nel passato si ha blow-up per $t = -\frac{1}{5}$



Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ Facendo come prima trovo $\frac{1}{c} = 0$ (??)

Il problema DEVE avere soluzione unica (è tutto tranquillo!).

È banalmente $u(t) \equiv 0$, con esistenza globale nel passato e nel futuro)

Esempio 4 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{2u} \\ u(0) = 7 \end{cases}$ La soluzione generale è...

$$u(t) = \sqrt{c-t}$$

Calcolo c : $u(0) = \sqrt{c} = 7 \Rightarrow c = 49.$

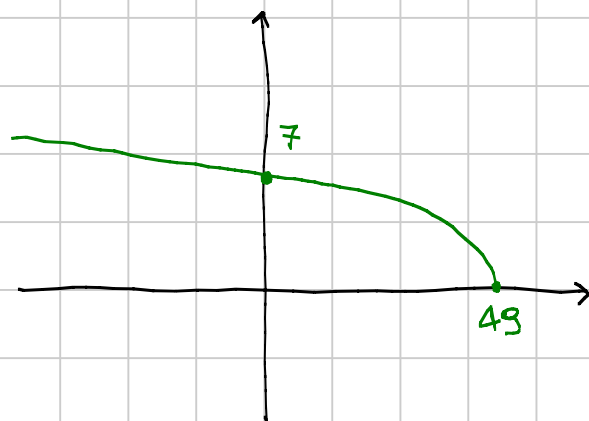
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$u(t) = \sqrt{49-t}$$

Verifica: FARE!

Studio: definita per $49-t \geq 0$, cioè $t \leq 49$, quindi intervallo massimale di esistenza = $(-\infty, 49)$ e tempo di vita = 49

In $T = 49$ non c'è blow-up, ma c'è break-down perché $u(t) \rightarrow 0$ e quando $u(t) = 0$ c'è un problema di definizione nel 2° membro dell'equazione.



Guardo la derivata: $\lim_{t \rightarrow 49^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow 49^-} \frac{-1}{2\sqrt{49-t}} = -\infty$
— 0 — 0 —