

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 091

Titolo nota

18/01/2011

PROBLEMA DI CAUCHY Equazione diff. + dati iniziali

In generale un'eq. diff. ha infinite soluzioni.

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$
Nota bene $u(t) = e^t + c$ NON è soluzione per $c \neq 0$
(sostituendo ottengo: $\overset{\uparrow}{e^t} = \underbrace{e^t + c}_u$: NO!)

Un'altra soluzione (anzi una famiglia infinita di soluzioni) è
 $u(t) = ce^t$. Verifica: $\overset{\uparrow}{ce^t} = \overset{\uparrow}{ce^t}$

In questo caso l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Esempio 2 $u'' = -u$ Una sol. è $u(t) = \sin t$. Un'altra è $u(t) = \cos t$
Infinite soluzioni sono $u(t) = a \sin t$.

Ancora più infinite sono $u(t) = a \sin t + b \cos t$
Ho una famiglia infinita dipendente da 2 parametri.

In generale se l'eq. diff. è di ordine k uno si aspetta una famiglia infinita di soluzioni dipendenti da k parametri.

Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$
Verifica:

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$$

$u(t) = \frac{c}{t}$ è soluzione? No, a meno che non sia $c=0$ oppure $c=1$.

Verifica:

$$u'(t) = -\frac{c}{t^2} \quad -[u(t)]^2 = -\frac{c^2}{t^2}$$

Le 2 cose coincidono se e solo se $c = c^2$, cioè se e solo se $c \in \{0, 1\}$.

In questo caso infinite soluzioni sono date dalla formula
 $u(t) = \frac{1}{t+c}$ Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -[u(t)]^2$

Oss. In questo l'insieme di definizione di $u(t)$ dipende da c (è $t \neq -c$) e non è prevedibile a priori guardando l'equazione

Analogia con le successioni per ricorrenza: un'eq. diff. è una "legge di evoluzione" che descrive come cambia nel tempo una certa quantità $u(t)$. La soluzione diventa unica se fisso una "condizione iniziale". Brutalmente: eq. diff. $\leadsto$ tempo continuo $t \in \mathbb{R}$
succ. ric. $\leadsto$ tempo discreto $t \in \mathbb{N}$.

Problema di Cauchy: eq. diff. (di solito in forma normale) + condizione/i iniziale/i.

Per equazioni del 1° ordine
$$\begin{cases} u' = f(t, u) & \text{Eq. diff.} \\ u(t_0) = u_0 & \text{Cond. iniziale} \end{cases}$$

due numeri dati

Procedura: $\rightarrow$ l'eq. ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro
 $\rightarrow$ imponendo la condizione iniziale determino univocamente il valore del parametro e quindi ho una soluzione unica.

Per equazioni del 2° ordine
$$\begin{cases} u'' = f(t, u, u') & \text{Eq. diff.} \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{due condizioni} \\ \text{iniziali} \end{array} \right\}$$

Si intende che t_0, u_0, u_1 sono numeri dati, il t_0 DEVE essere lo stesso sopra e sotto, e devono essere prescritte u e u' in t_0 .

Operativamente: la soluzione generale dell'eq. diff. dipende da 2 parametri, che spero di determinare univocamente imponendo le 2 condizioni iniziali.

Per equazioni di ordine k

$$\begin{cases} u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} k \text{ condizioni} \\ \text{iniziali} \end{array}$$

L'importante è che t_0 sia lo stesso ovunque, e che in t_0 siano date u e le sue derivate fino alla $(k-1)$ -esima.

Esempi

$$\begin{cases} u'' + 3u' + tu = e^t \\ u(1) = 7 \\ u'(1) = 12 \end{cases}$$

stessa equazione

$$u(1) = 7$$

$$u'(2) = 7$$

No problema
di Cauchy

stessa equazione

$$u(1) = 7$$

$$u(5) = 8$$

No problema di
Cauchy

— o — o —

TEOREMA DI ESISTENZA

Consideriamo il problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine k in forma normale:

$$u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

Se f è continua, allora il problema ammette almeno una soluzione definita almeno in un intervallo (a, b) contenente l'istante iniziale t_0 .

TEOREMA DI UNICITÀ

Consideriamo un problema di Cauchy come sopra.

Se f è un po' meglio (ad esempio se f è derivabile rispetto alle variabili da cui dipende), allora la soluzione è UNICA.

Oss. Valgono sempre i soliti metateoremi che dicono che qualunque funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è

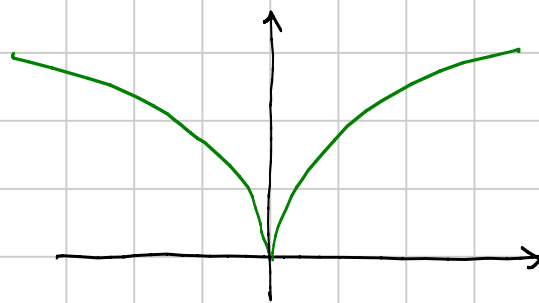
→ continua dove uno di suoi problemi burocratici

→ derivabile " " " " " e le singole componenti uno hanno problemi di derivabilità.

Esempio di non unicità. Considero il pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Oss. la funzione $g(u) = 3|u|^{\frac{2}{3}}$ è continua ma non derivabile in $u=0$, e nell'esempio si parte proprio da $u=0$.



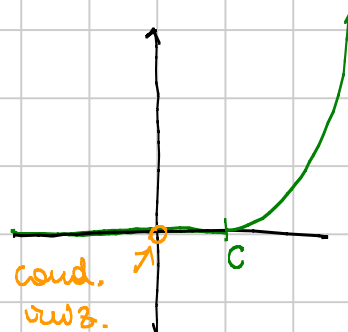
Una soluzione del problema è $u(t) = t^3$. Verifica:
 $u'(t) = 3t^2 = 3|u(t)|^{2/3}$

Un'altra soluzione del problema è la funzione $u(t) \equiv 0$. Verifica:
 $u'(t) = 0 = 3|u(t)|^{2/3}$

Quindi ci sono 2 soluzioni dell'equazione diff. che verificano la condizione iniziale (nota bene: valgono le ipotesi del teorema di esistenza, ma non del te. di unicità).

In realtà ci sono addirittura infinite soluzioni, date da un mix delle due precedenti:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$



Verificare che per ogni $c \geq 0$ questa formula fornisce una soluzione.

— o — o —