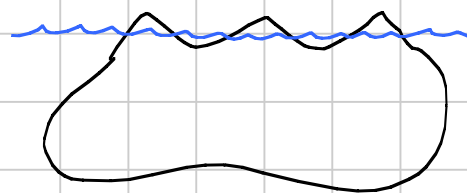


Equazioni differenziali

Equazione differenziale: equazione che lega una funzione $u(t)$ e un po' di sue derivate



Esempi $u'(t) = \sin u(t)$ $u''(t) + \overset{\text{non autonoma}}{\textcircled{t}} u'(t) + e^{u(t)} = 0$ $u'''(t) = 5$

Si dice ordine di un'eq. differenziale il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione. Negli esempi: 1, 2, 3.

Un'eq. diff. si dice autonoma se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate. Negli esempi: SI, NO, SI

Notazione rapida: omettere tutte le t che sono argomento di $u, u', u'', \dots$

Negli esempi:

$$u' = \sin u$$

$$u'' + t u' + e^u = 0$$

$$u''' = 5$$

Un'eq. diff. è autonoma se e solo se in notazione rapida non compare nessuna t .

In forma generale un'eq. diff. di ordine k si scrive nella forma

$$\Phi(t, u, u', u'', \dots, u^{(k)}) = 0$$

se non autonoma

$$\Phi(u, u', u'', \dots, u^{(k)}) = 0$$

se autonoma

Un'eq. diff. si dice in forma normale se la derivata di ordine più alto è stata "ricavata" rispetto al resto

$$u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

Esempi

$$u'' = u' + \sin u$$

FORMA NORMALE

$$[u']^3 + t \cos u = 0 \rightsquigarrow u' = -\sqrt[3]{t \cos u} \quad \text{FORMA NORMALE}$$

$$[u']^{30} - e^t \cos u = 0$$

Non si può ricavare in modo univoco:
non si può mettere in forma normale.

Equazioni diff. del 1° ordine a variabili separabili: sono eq. diff. del 1° ordine in forma normale in cui il 2° membro è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

1° dei 3 casi che saranno trattati

Esempi

$$u' = e^t \cdot \arctan u$$

$$u' + tu = u \rightsquigarrow u' = u(1-t) = \underbrace{(1-t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{u}_{g(u)}$$

$$u' = u^2 \rightsquigarrow u' = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot \underbrace{u^2}_{g(u)}$$

Oss. Tutte le equazioni del 1° ordine autonome in forma normale rientrano tra quelle a variabili separabili.
Sono infatti della forma

$$u' = g(u)$$

$$u' = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot g(u)$$

Eq. diff. di ordine k lineari, omogenee e non omogenee.

Un'eq. diff. di ordine k si dice lineare se si presenta nella forma

$$a_k(t) u^{(k)} + a_{k-1}(t) u^{(k-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

o analogamente

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)} = f(t)$$

Gli $a_i(t)$ sono funzioni della sola t data, così come la $f(t)$.

In altre parole, il 1° membro è una somma di u e di tutte le sue derivate moltiplicate per opportuni coeff. dipendenti solo da t , il 2° membro dipende solo da t .

Le funzioni $a_i(t)$ si dicono coefficienti dell'equazione

Bruttalmente: dipendente "pulita" da u e dalle sue derivate.

L'equazione lineare si dice omogenea se $f(t) = 0$, si dice non omogenea se $f(t) \neq 0$.

Esempi

$$u' + t^2 u = 0$$

Lineare

$$u' + t u^2 = 0$$

Non lineare per colpa di u^2

$$u' + \text{cost.} \cdot u = 0$$

Lineare

$$u' + \cos(tu) = 0$$

Non lineare perché u è contenuta dentro un coseno

Osservazione Un'eq. diff. lineare si può mettere in forma normale se $\Leftrightarrow$ si può dividere per $a_k(t) \Leftrightarrow a_k(t) \neq 0$ per ogni t .

Esercizio Scrivere un'eq. diff. lineare, autonoma, non omogenea.

$$u'' + 3u' + 5u = \boxed{27}$$

↑ la $f(t)$ deve essere diversa da 0 e non dipendere da t , quindi costante $\neq 0$

Caso speciale: equazioni differenziali lineari del 1° ordine già pronte per la forma normale

$$u' + a(t)u = b(t)$$

2° dei 3 casi che saranno trattati

Altro caso speciale: eq. diff. lineari di ordine k a coeff. costanti, omogenee e non omogenee.

$$a_k u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

3° dei 3 casi che tratteremo

o con le sommatorie:

$$\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)} = f(t)$$

dove gli a_i sono NUMERI (non dipendono da t).
— 0 — 0 —

Risolvere un'equazione diff. vuol dire trovare una funzione $u(t)$ definita in un insieme (intervallo) (a, b) o semiretta o tutto $\mathbb{R}$ che soddisfa l'equazione per ogni $t \in (a, b)$.

Osservazione: La zona di definizione di $u(t)$ è tra le incognite del problema.

Esempi $u' + \text{cost.} \cdot u = \text{cost.}$

$$u' = \text{cost.} (1-u)$$

1° ordine, non autonoma, si mette facilmente in forma normale, lineare non omogenea ma non a coeff. costanti, e si può mettere a variabili separabili (rientra nel 1° e 2° caso)

$$u' = f(u)$$

1° ordine, autonoma, forma normale, rientra tra quelle a variabili separabili, lineare omogenea a coeff. costanti

(rientra in tutti e 3 i casi speciali)

— 0 — 0 —