

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 089

Titolo nota

15/01/2011

Esercizio 1 Calcolare z e w sapendo che

$$\begin{cases} z + 2i w = \sqrt{5} \\ \bar{z} w = 1 \\ \operatorname{Re}(w^2) = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Quando solo le prime 2 equazioni: calcolo w dalla 1ª, sostituisco nella 2ª, e vedo che succede

$$2i w = \sqrt{5} - z \Rightarrow w = \frac{\sqrt{5} - z}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{\sqrt{5}i - zi}{-2}$$

Sostituisco nella 2ª: $\bar{z} \frac{i z - i \sqrt{5}}{2} = 1$, cioè $\bar{z} \cdot (i z - i \sqrt{5}) = 2$

$$i z \bar{z} - i \bar{z} \sqrt{5} = 2, \quad i |z|^2 - i \bar{z} \sqrt{5} = 2$$

Divido per i :

$$|z|^2 - \bar{z} \sqrt{5} = \frac{2}{i} = -2i; \quad |z|^2 - \bar{z} \sqrt{5} = -2i$$

Bovius: forma cartesiana $z = a + bi$

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{|z|^2} - \underbrace{(a - bi)}_{\bar{z}} \sqrt{5} = -2i; \quad a^2 + b^2 - a\sqrt{5} + i b\sqrt{5} = -2i$$

Uguaglio parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{cases} b\sqrt{5} = -2 \\ a^2 + b^2 - a\sqrt{5} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{uguaglianza parte immaginaria} \\ \text{" " reale} \end{array}$$

$$b = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}, \quad 2^\text{a} \text{ equazione: } a^2 + \frac{4}{5} - a\sqrt{5} = 0$$

$$a^2 - a\sqrt{5} + \frac{4}{5} = 0 \quad a_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5 - \frac{16}{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{\frac{9}{5}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \pm \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \nearrow \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \searrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Quindi ho trovato 2 soluzioni:

$$z = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}i$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}i$$

Noto z , calcolo i corrispondenti w e controllo se

$\operatorname{Re}(w^2) = -\frac{3}{5}$. Andrà bene per una sola soluzione.

leggermente più astuto : $|z|^2 - \sqrt{5} \bar{z} = -2i$

Pensiamo alla parte immaginaria a dx e sx.

$$\operatorname{Im}(-2i) = -2; \quad \operatorname{Im}(|z|^2 - \sqrt{5} \bar{z}) = \operatorname{Im}(-\sqrt{5} \bar{z}) =$$

$\uparrow$
 $|z|^2$ non contribuisce
alla parte immaginaria

$$= -\sqrt{5} \operatorname{Im}(\bar{z}) = \sqrt{5} \operatorname{Im}(z)$$

Uguagliando

$$\sqrt{5} \operatorname{Im}(z) = -2 \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

— 0 — 0 —

Esercizio 2 Trovare i (anzi il) numero complesso z t.c.

$$\arg(z) = \frac{5\pi}{6} \quad \text{e} \quad z^{-63} = -i$$

$$z^{-63} = -i$$

Bovino : $z = \rho e^{i\theta}$; $\underbrace{\rho^{-63} e^{-63i\theta}}_{z^{-63}} = \underbrace{1 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}}_{-i}$

Uguagliando : $\begin{cases} \rho^{-63} = 1 \\ -63\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\frac{3\pi}{2 \cdot 63} + 2k \frac{\pi}{63} \end{cases}$

$\nearrow$ essendo $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario
è uguale mettere
+ o -

$$\rho = 1 \quad \theta = -\frac{\pi}{42} + 2k \frac{\pi}{63}$$

Domanda : esiste un valore di k
per cui $\theta = \frac{5\pi}{6}$?

$$-\frac{\pi}{42} + 2k \frac{\pi}{63} = \frac{5\pi}{6} \quad ; \quad -\frac{1}{2 \cdot 21} + \frac{2k}{3 \cdot 21} = \frac{5}{2 \cdot 3} \quad \text{Moltiplico per } 2 \cdot 3 \cdot 21$$

$$-3 + 4k = 5 \cdot 21 = 105 \Rightarrow 4k = 108 \Rightarrow k = 27 \quad (\text{esiste!})$$

$$z = \rho e^{i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i).$$

Esercizio 3 $x^2 + ix + 6 = 0$ Risolvere

Formula risolutiva! $x_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 24}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-i \pm 5i}{2}$

$x = 2i$ $x = -3i$

Più raffinato: cerco 2 numeri complessi x_1, x_2 tali che
somma $= -i$ Prodotto $= 6$

In effetti le 2 radici trovate soddisfano.

Esercizio 4 $x^3 - x + 2i = 0$. Si vede a occhio che $x = i$ è sol.

Percorso $\Rightarrow$ il polinomio è divisibile per $x - i$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x + 2i \\ -x^3 + ix^2 & \\ \hline ix^2 - x + 2i & \\ -ix^2 - x & \\ \hline -2x + 2i & \\ 2x - 2i & \\ \hline & \end{array}$$

Quindi $x^3 - x + 2i = (x - i)(x^2 + ix - 2)$

$x = i$ è una soluzione. Le altre 2 si trovano risolvendo $x^2 + ix - 2 = 0$

Da qui si risolve come prima...

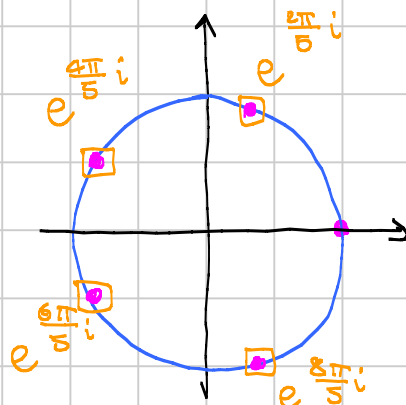
Esercizio 5 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ Ricorda

$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Il polinomio a sx ha 5 radici, che sono le radici quinte di 1, che sono $x = 1$ e quelle che completano il pentagono

le stesse 5 radici sono radici a destra.

Ora $x = 1$ annulla il termine $x = 1$. Le altre 4 annullano il fattore di 4° grado.



Se volessi fattorizzare il polinomio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ come prodotto di 2 pol. di 2° grado a coeff. reali, darei accoppiare i fattori provenienti da coppie di radici coniugate

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$$

Se $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ $\leadsto x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} x + 1$

Se $\alpha = e^{\frac{4\pi}{5}i}$ $\leadsto x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} x + 1$

Quindi: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \underbrace{(x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} x + 1)}_{=0} \underbrace{(x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} x + 1)}_{=0}$

Esercizio 6 $|z| z^2 + \bar{z} = 0$

Poco astuto $|z| z^2 = -\bar{z} = -1 \cdot \bar{z}$ $z = \rho e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \rho^2 e^{2i\theta} &= 1 \cdot e^{i\pi} \rho e^{-i\theta} \\ \rho^3 e^{2i\theta} &= \rho e^{i\pi - i\theta} \end{aligned}$$

da cui $\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 2\theta = \pi - \theta + 2k\pi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$ si risolve

Più astuto Moltiplico per $\bar{z}^2$: $|z| z^2 \bar{z}^2 + \bar{z}^3 = 0$

$$\begin{aligned} |z| (z\bar{z})^2 + \bar{z}^3 &= 0 \\ |z|^3 + \bar{z}^3 &= 0 \end{aligned}$$

e da qui si passa in forma esponenziale come prima.