

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 088

Titolo nota

15/01/2011

Seno e coseno di un numero complesso

Caso immaginario puro

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$$

Sommando:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

Sottraendo:

$$\sin\theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Le 2 formule (per ora) sono valide per θ reale, e permettono di esprimere $\sin\theta$ e $\cos\theta$ in funzione dell'esponenziale complesso. Più in generale si definisce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Nel caso in cui z è un numero reale, le definizioni coincidono con $\cos$ e $\sin$ classici.

Oss. $\cos z$ e $\sin z$ sono funzioni periodiche di periodo 2π (reale). Infatti

$$\begin{aligned} \cos(z + 2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z) \end{aligned}$$

periodo dell'espou. compl.

e stessa cosa per $\sin z$.

— o — o —

Senso e coseno di numeri immaginari puri. Sia $z = ib$, con $b \in \mathbb{R}$

$$\cos(ib) = \frac{e^{i \cdot ib} + e^{-i \cdot ib}}{2} = \frac{e^{-b} + e^b}{2} = \cosh b$$

$$\sin(ib) = \frac{e^{i \cdot ib} - e^{-i \cdot ib}}{2i} = \frac{e^{-b} - e^b}{2i} = -\frac{1}{i} \sinh b = i \sinh b$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \cos(ib) &= \cosh b \\ \sin(ib) &= i \sinh b \end{aligned}$$

— o — o —

Fatto importante $\sinh z$ e $\cosh z$, viste come $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sono surgettive.

Esempio 1 Voglio risolvere $\cos z = 2011$

Uso la formula: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2011$, $e^{iz} + e^{-iz} = 4022$

Pongo $w = e^{iz}$ e ottengo $w + \frac{1}{w} = 4022$; $w^2 - 4022w + 1 = 0$

$w_{1,2} = 2011 \pm \sqrt{2011^2 - 1}$. Ho trovato 2 soluzioni per w (e questo non dipende dal particolare numero 2011. Se l'eq. fosse stata $\cos z = A$, avrei avuto $w_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$, questo anche se $A \in \mathbb{C}$. Ora devo tornare in z risolvendo

$$e^{iz} = 2011 + \sqrt{2011^2 - 1}$$

$$e^{+iz} = 2011 - \sqrt{2011^2 - 1}$$

Queste equazioni si possono risolvere perché l'esponenziale prende tutti i valori $\neq 0$ (basta notare che w non può essere $= 0$).
(Finire i conti per esercizio e vedere che coincidono con il 2° proc.)

Alternativa: uso la formula $\cos b = \cos \mathbb{R}(ib) = 2011$

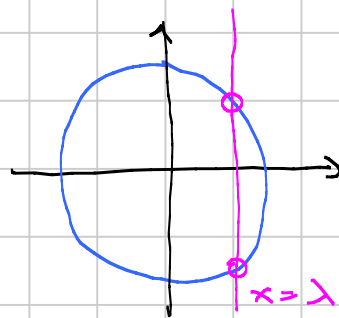
Ora questa ha soluzione

$$ib = \text{sett} \cosh(2011) \Rightarrow b = \frac{1}{i} \text{sett} \cosh(2011)$$

$$ib = -\text{sett} \cosh(2011) \Rightarrow b = -\frac{1}{i} \text{sett} \cosh(2011)$$

Quindi l'equazione $\cos z = 2011$ ha almeno 2 radici immaginarie pure. Ad entrambe posso poi aggiungere multipli di 2π .

Oss. Anche sui reali si ottengono in generale 2 famiglie infinite di soluzioni
 $\cos x = \lambda$



— o — o —

Esempio 2 Risolvere $\sin z = i$

Con le formule: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i$; $e^{iz} - e^{-iz} = 2i^2 = -2$

Pongo $w = e^{iz}$ e ho $w - \frac{1}{w} = -2$, cioè $w^2 + 2w - 1 = 0$
 da cui

$$w_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Ora devo risolvere

$$e^{iz} = -1 + \sqrt{2}$$

$$e^{iz} = -1 - \sqrt{2}$$

Risolvero la 1^a:

$$e^{iz} = -1 + \sqrt{2}$$

Scrivo $z = x + iy$

$$e^{iz} = e^{ix-y} = e^{-y} \cdot e^{ix} = \boxed{-1 + \sqrt{2}} = (-1 + \sqrt{2}) \cdot e^{i0}$$

numero reale positivo $\Rightarrow \theta = 0$

quindi

$$\begin{cases} e^{-y} = -1 + \sqrt{2} \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\log(\sqrt{2}-1) \\ x = 2k\pi \end{cases}$$

1^a famiglia di soluzioni

Risolvero la 2^a:

$$e^{iz} = -1 - \sqrt{2}$$

Scrivo $z = x + iy$

$$e^{iz} = e^{ix-y} = e^{-y} \cdot e^{ix} = \boxed{-1 - \sqrt{2}} = (1 + \sqrt{2}) e^{i\pi}$$

numero reale negativo $\Rightarrow \theta = \pi$

$$\begin{cases} e^{-y} = 1 + \sqrt{2} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

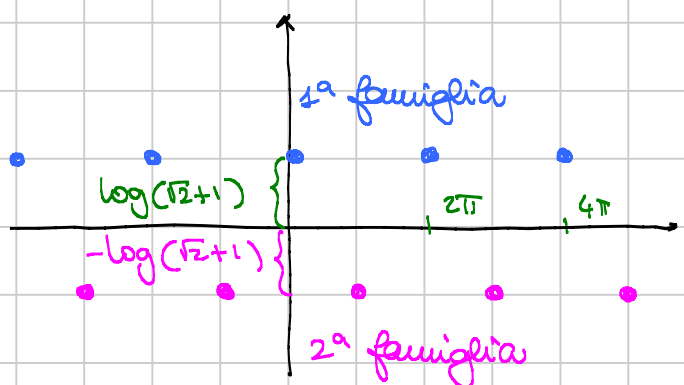
$$\begin{cases} y = -\log(\sqrt{2}+1) \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

2^a famiglia di soluzioni

Rappresento le 2 famiglie di soluzioni nel piano di Gauss.

Oss. $-\log(\sqrt{2}-1) = \log \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \log \frac{1}{\sqrt{2}-1} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \log(\sqrt{2}+1) > 0$

Soluzioni dell'equazione
 $\sin z = i$,



Domanda: ci sono soluzioni
immaginarie pure?

Sì: la soluzione $z = i \cdot \log(\sqrt{2}+1)$
— 0 — 0 —

Esempio 3 Risolvere $z^4 = |\bar{z}|$

lavoro in forma esponenziale. Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$ e cerco $\rho \in \mathbb{R}$.

$$z^4 = \rho^4 e^{4i\theta}, \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}, \quad |\bar{z}| = \rho \quad \text{Uguaglio:}$$

$$\rho^4 e^{4i\theta} = \rho = \rho e^{i0}$$

Otengo il sistema

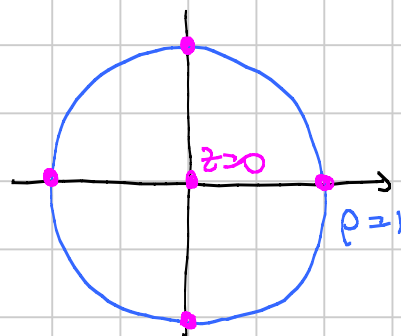
$$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^4 - \rho = 0 \\ \theta = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \rho(\rho^3 - 1) = 0 \quad \rho = 0 \text{ oppure } \rho = 1$$

Con $\rho = 0$ ottengo la soluzione $z = 0$

Con $\rho = 1$ ottengo 4 soluzioni per $k = 0, 1, 2, 3$

In conclusione ho 5 soluzioni

$$z = 0, \pm 1, \pm i$$



(la verifica costa 30 secondi).