

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 087

Titolo nota

15/01/2011

Numeri complessi: esponenziale complesso

Funzione esponenziale: e^z . Sia $z = x + iy$ (forma cartesiana).

Allora

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \end{aligned}$$

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

Definizione di esp. complesso

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos \operatorname{Im}(z) \quad \operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin \operatorname{Im}(z)$$

Interpretazione con le serie della formula $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots, \text{ quindi}$$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{1}{2} (i\theta)^2 + \frac{1}{3!} (i\theta)^3 + \frac{1}{4!} (i\theta)^4 + \frac{1}{5!} (i\theta)^5 + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{3!} i\theta^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 + \frac{1}{5!} i\theta^5 + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \frac{1}{6!} \theta^6 + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots\right)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

La formula per l'esponenziale complesso, con esponente immaginario puro, è coerente con lo sviluppo in serie della funzione e^x .

Si potrebbe dimostrare che anche con esponente $z \in \mathbb{C}$ qualunque la serie converge a $e^x (\cos y + i \sin y)$.

Proprietà dell'esponenziale complesso

È iniettivo? NO! È periodico di periodo $2\pi i$ (immaginario!).

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^z \\ &\quad \downarrow \\ &= e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

È surgettivo? NO! Infatti non prende il valore 0.

$$e^z = \boxed{e^x} (\cos y + i \sin y)$$

↓
modulo di e^z : questo è sempre > 0 e mai nullo,
quindi e^z non può essere 0.

Fatto: per ogni numero complesso $w \neq 0$, esiste uno $z \in \mathbb{C}$ tale che
 $e^z = w$

Conseguenza: l'immagine di e^z , vista come $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Detto in altro modo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è surgettiva.

Dim. Sia $w = a+ib = \rho e^{i\theta}$. Sia $z = x+iy$. Devo risolvere

$$e^z = w, \text{ cioè } e^x \cdot e^{iy} = \rho \cdot e^{i\theta}, \text{ quindi}$$

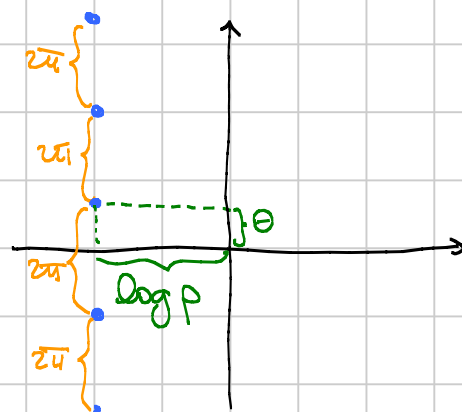
$$\begin{cases} e^x = \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = \log \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{log classico di un numero reale } \rho > 0 \\ \text{perché } w \neq 0 \end{array}$$

↑
 $k \in \mathbb{Z}$

— 0 — 0 —

Dato $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$, esistono infiniti
 $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = w$.

Nel piano di Gauss le soluzioni sono
sfalsate verticalmente di multipli di 2π .



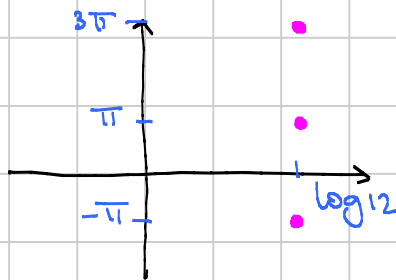
Logaritmo complesso. Possiamo pensare alle soluzioni di $e^z = w$ come gli "infiniti logaritmi complessi" di w .

Esempio 1 Risolvere $e^z = -12$. Scrivo $z = x + iy$. Scrivo $-12 = 12 e^{i\pi}$. Uguaglio

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = 12 e^{i\pi} \Rightarrow \begin{cases} e^x = 12 \\ y = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$x = \log 12$$

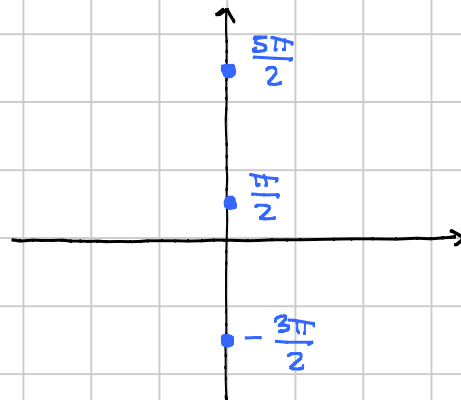
$$y = \pi + 2k\pi$$



Esempio 2 Risolvere $e^z = i$ ($z = \log i$) $z = x + iy$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}, \quad i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}. \text{ Uguaglio: } e^x \cdot e^{iy} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} e^x = 1 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$



— o — o —

Senso e coseno iperbolico di un numero complesso

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Sia ora $z = x + iy$. Allora

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^x \cdot e^{iy} + e^{-x} \cdot e^{-iy}}{2} = \frac{1}{2} (e^x \cos y + i e^x \sin y + e^{-x} \cos(-y) + i e^{-x} \sin(-y)) \\ &= \frac{1}{2} \cos y (e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2} i \sin y (e^x - e^{-x}) \end{aligned}$$

Da questo si deduce che

$$\cosh(x+iy) = \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y$$

Stesso discorso con $\sinh z$

$$\sinh z = \frac{e^x \cdot e^{iy} - e^{-x} \cdot e^{-iy}}{2} = \frac{1}{2} \cos y (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2} i \sin y (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh(x+iy) = \sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \cdot \sin y$$

Usando queste formule si vede che

$$\cosh(iy) = \cosh 0 \cdot \cos y + i \sinh 0 \cdot \sin y = \cos y$$

$$\sinh(iy) = \sinh 0 \cdot \cos y + i \cosh 0 \cdot \sin y = i \sin y$$

In un certo senso le funzioni iperboliche coincidono con le funzioni trigonometriche classiche a meno di una rotazione nel piano di Gauss.

Osservazione finale Le funzioni $\cosh$ e $\sinh$ sono periodiche, ed il loro periodo è $2\pi i$.