

FATTORIZZAZIONE SUI REALI

Sia $P(x)$ un polinomio a coeff. reali. Vale il seguente fatto:

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Dim. Supponiamo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$$= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}$$

$$= \overline{a_n} (\bar{z})^n + \overline{a_{n-1}} (\bar{z})^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_0}$$

$$= a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0$$

$$= P(\bar{z}).$$

(coniugato somma =
somma coniugati)

(coniugato prodotto =
prodotto coniugati)

($\bar{a_i} = a_i$ perché i coeff.
sono reali)

— o — o —

Conseguenza 1: se $P(x)$ è un pol. a coeff. reali e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una sua radice, allora anche $\bar{\alpha}$ è una radice

$$\text{Dim. } P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

↑
coeff.
reali

↑
 α è
radice.

— o — o —

Le radici con parte immaginaria $\neq 0$ di un polinomio a coeff. reali arrivano sempre "a coppie", cioè se ce n'è una, c'è anche la coniugata.

Conseguenza 2: se α è una radice di $P(x)$ a coeff. reali di molteplicità m , allora anche $\bar{\alpha}$ ha molteplicità m .

"Dim." $P(x) = (x-\alpha) Q_1(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) Q_2(x)$

Se α ha molteplicità ≥ 2 , vuol dire che $Q_2(\alpha) = 0$, ma allora anche $Q_2(\bar{\alpha}) = 0$, e così via.

Osservazione Cosa succede accoppiando i fattori $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ nella fattorizzazione?

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) &= x^2 - \bar{\alpha}x - \alpha x + \alpha\bar{\alpha} \\ &= x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \\ &= x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2\end{aligned}$$

NB. $z = a+bi$, allora $z+\bar{z} = a+bi + a-bi = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$

Moltiplicando i due fattori $(x-\alpha)$ e $(x-\bar{\alpha})$, due coniugati numeri complessi, si ottiene un fattore di 2° grado che ha coeff. reali.

Fattorizzazione reale Sia $P(x)$ un polinomio a coeff. reali.

Lo fattorizzo sui complessi come prodotto di n fattori di 1° grado

$$P(x) = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

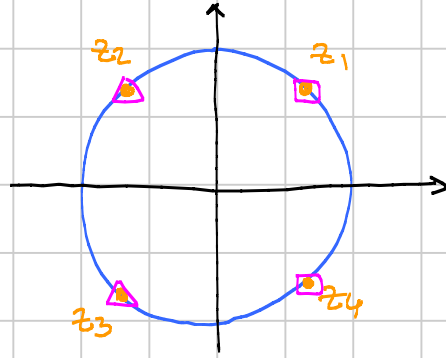
Alcuni di questi fattori sono già reali (quelli corrispondenti a radici reali). Gli altri compaiono a coppie $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$.

Moltiplicando i 2 fattori di ogni coppia si ottiene un polinomio di 2° grado a coeff. REALI.

Così ogni polinomio a coeff. reali si scrive sempre come prodotto di fattori di 1° o 2° grado a coeff. reali. Per farlo si passa attraverso la fattorizzazione come prodotto di fattori di 1° grado a coeff. complessi.

Esempio 1 $x^4 + 1$. Fattorizzo sui complessi. Per trovare le radici complesse risolvo $x^4 + 1 = 0$, cioè $x^4 = -1$, cioè trovo le 4 radici quante complesse di -1 .

$$z^4 = -1 \quad z_{1,2,3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm i)$$



Fattorizzazione sui complessi:

$$x^4 + 1 = \underbrace{(x - z_1)(x - z_4)}_{\text{pink}} \underbrace{(x - z_2)(x - z_3)}_{\text{pink}}$$

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 \quad \text{Lo applico con}$$

$$\alpha = z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(x - z_1)(x - z_4) = x^2 - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} x + 1 = x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(x - z_2)(x - z_3) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$$

Così abbiamo ottenuto la fattorizzazione reale

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Alternativa precorsistica: $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$

$$= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$$

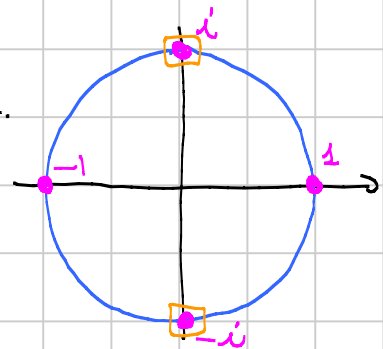
— o — o —

Esempio 2 $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

Le radici complesse di $x^4 - 1$ si trovano risolvendo $x^4 = 1$

La radice quante di 1 in $\mathbb{R}$ è unica ed è 1.

Sui complessi ci sono 4 radici quante, di cui 2 reali,



Per trovarle basta osservare che 1 è una

radice e le restanti devono completare un

quadrato. Le radici reali ± 1 producono i 2 fattori $(x + 1)(x - 1)$.

Le radici $\pm i$ producono $(x + i)(x - i) = x^2 + 1$

— o — o —

Esempio 3 Fattorizzazione $x^4 + x^2 + 1$.

Radici reali non ce ne sono perché è somma di quadrati.

Cerco radici complesse: $x^4 + x^2 + 1 = 0$. Pongo $y = x^2$

$$y^2 + y + 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Ora devo risolvere $x^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$x^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho^2 e^{2i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\rho^2 e^{2i\theta} = 1 \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

In tutti e 2 i casi si ha $\rho = 1$. Per θ si ha

$$1^\circ \text{ caso: } 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$$

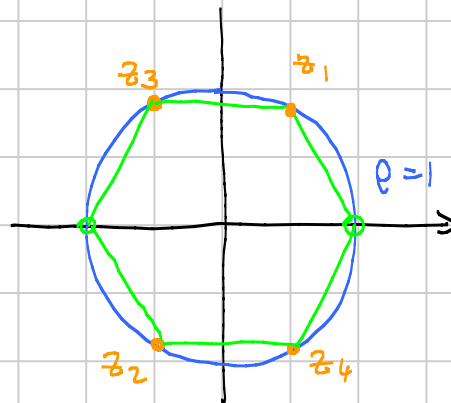
$$2^\circ \text{ caso: } 2\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\theta_3 = \frac{2\pi}{3} \quad \theta_4 = \frac{5\pi}{3}$$

Le radici complesse sono come in figura e sono a 2 a 2 coniugate. In forma cartesiana sarebbero

$$\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



Accoppiando i fattori ottengo la scomposizione reale

$$(x - z_1)(x - z_4)(x - z_2)(x - z_3) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Oss.1 Non essendo $x^4 = \text{numero}$, non sono disposte a quadrato !!!

Oss.2 Sono quattro vertici di un esagono !!!

$$\underbrace{x^6 - 1}_{\text{radici seste di 1: esagono}} = \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{radici } \pm 1} \underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}_{\text{le altre 4 radici}}$$

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= \underbrace{(x+1)}_{\text{radici reali}} \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{radici reali}} \underbrace{(x-1)}_{\text{radici reali}} \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{radici reali}} \end{aligned}$$

$x^4 + x^2 + 1$