

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 085

Titolo nota

13/01/2011

POLINOMI E NUMERI COMPLESSI

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Gli a_i sono i coeff. del polinomio. In generale possiamo anche considerare $a_i \in \mathbb{C}$.

Ogni polinomio può essere pensato come funzione di $x \in \mathbb{R}$ o anche $x \in \mathbb{C}$.

Un numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ si dice radice del polinomio se
$$P(\alpha) = 0$$

Teorema di Ruffini Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $P(x)$, allora $P(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$, cioè esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x)$$

Divisione tra polinomi (precorso) Dati 2 polinomi $A(x)$ e $B(x)$, esistono sempre 2 polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$\uparrow$ quoziente $\leftarrow$ resto

e $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(B(x))$.

Dim. di Ruffini data la divisione. Faccio la divisione tra

$A(x) = P(x)$ e $B(x) = x - \alpha$. Ottengo che

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) + R(x)$$

con $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(x - \alpha) = 1$. Quindi $\text{grado}(R(x)) = 0$, cioè $R(x)$ è una costante r .

Quindi
$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) + r$$

Sostituendo $x = \alpha$ ottengo che

$$\underset{0}{P(\alpha)} = (\underset{0}{\alpha - \alpha}) \underset{+1}{Q(\alpha)} + 1$$

quindi $1=0$, quindi il resto è 0, quindi $P(x)$ è divisibile per $Q(x)$.

Fatto 1 Un polinomio di grado n può avere al max n radici

Dim. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le prime n -radici. Allora

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) - Q(x)$$

e $Q(x)$ deve essere per forza una costante altrimenti il grado a dx supera il grado a sx. Quindi

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \cdot c$$

Quindi se $P(\alpha) = 0$, α deve per forza essere uno tra $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Multiplicità di una radice Sia α una radice di $P(x)$. Si definisce multiplicità di α il più grande intero m tale che $P(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$.

In altri termini, m è l'esponente con cui il fattore $(x - \alpha)$ compare nella scomposizione di $P(x)$.

Quando si dice il fatto 1, si intende che una radice di molteplicità m conta come m radici.

FATTO 2 Teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio di grado n ha esattamente n radici se contate con molteplicità (si intende radici complesse)

Conseguenza: ogni polinomio si può scrivere come prodotto di fattori di 1° grado a coeff. complessi

$$P(x) = c (x-d_1) \cdot (x-d_2) \cdot \dots \cdot (x-d_n)$$

dove $d_1, \dots, d_n$ sono le radici complesse (eventualmente ripetute a seconda della molteplicità) e c è una costante (il coeff. di x^n).

Oss. Il punto fondamentale della dir. è far vedere che ogni polinomio di grado ≥ 1 a coeff. complessi ha almeno una radice.

Se so fare questo si procede per induzione.

Prendo $P(x)$ di grado n . Questo ha almeno una radice d_1 .

Ruffini: $P(x) = (x-d_1) Q(x)$ con $Q(x)$ di grado $n-1$

Ora $Q(x)$ ha almeno una radice d_2 .

Ruffini: $P(x) = (x-d_1) \cdot (x-d_2) \cdot R(x)$ con $R(x)$ di grado $n-2$.

E così via per n passaggi

— 0 — 0 —

Esempio 1 $P(x) = x^2 + 1$ Sui reali non si scompone

Tuttavia $P(x)$ ha 2 radici complesse

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

↑ 2 radici complesse

Fattorizzazione complessa

$$(x^2 + 1) = (x - i)(x + i)$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $P(x) = x^4 - 1$

$$= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Sui reali siamo al capolinea. Sui complessi si procede come sopra

$$= (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1) \quad \text{Radici: } x = \pm 1, x = \pm i$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $P(x) = x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Sui reali è finita. Sui complessi risolvo $x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Scomposizione

$$(x^3 + 8) = (x + 2)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$$

In alternativa (fine!) si potevano trovare le radici

risolvendo $x^3 = -8$ come ricerca di radici cubiche.