

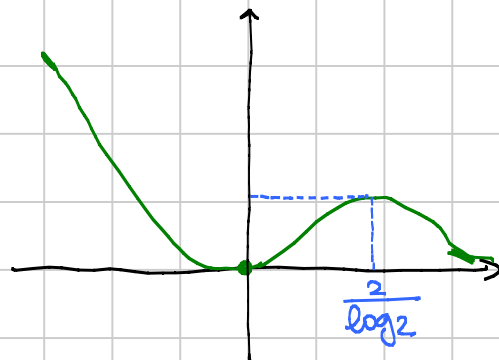
Esercizio 1 Calcolare $\inf / \sup / \max / \min$ di

$$\{x^2 2^{-x} : x > 0\}$$

Modulo y: studio $f(x) = x^2 2^{-x}$ per $x > 0$

$$f(0) = 0 \quad f(x) > 0 \text{ per } x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$f(x) = x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0,$$

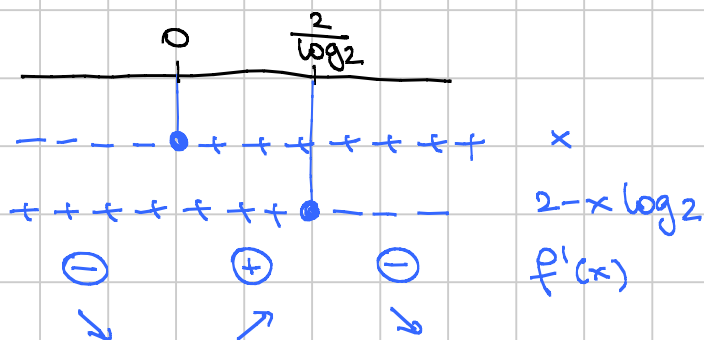
quindi $x=0$ è un punto di minimo locale (e pure globale).

Sulla base di queste info ci aspettiamo che $f'(x)$ si annulli per $x=0$ e per un $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x 2^{-x} - x^2 2^{-x} \log 2 = 2^{-x} (2x - x^2 \log 2) \\ &= x 2^{-x} (2 - x \log 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ &x = \frac{2}{\log 2} \end{aligned}$$

Se voglio il segno di $f'(x)$ studio la disequazione con i prodotti



$$\text{Quindi } \sup = \max = \frac{4}{e^2 \log^2 2}$$

$$\inf = 0 \quad \min \text{ N.E.}$$

Calcolo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\log 2}\right) &= \frac{4}{\log^2 2} \cdot 2^{-\frac{2}{\log 2}} \\ &= \frac{4}{e^2 \log^2 2} \end{aligned}$$

Se fosse stato $\{x^2 2^{-x} : x \geq 0\}$ allora $\inf = \min = 0$.
— o — o —

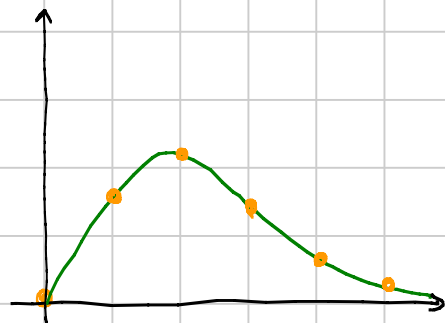
Esempio 2 $\{n^2 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

Sempre mondo y , ma considero solo i punti del grafico con ascissa $\in \mathbb{N}$.

$\inf = \min = 0$ raggiunto per $n=0$.

Per calcolare il max, bisogna trovare l'intervallo in cui è contenuto il p.to di max sui reali.

In questo caso basta provare, perché la funzione prima cresce e poi definitivamente decresce.



$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad f(2) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad f(3) = 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$f(4) = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1 \text{ e da qui in poi decresce.}$$

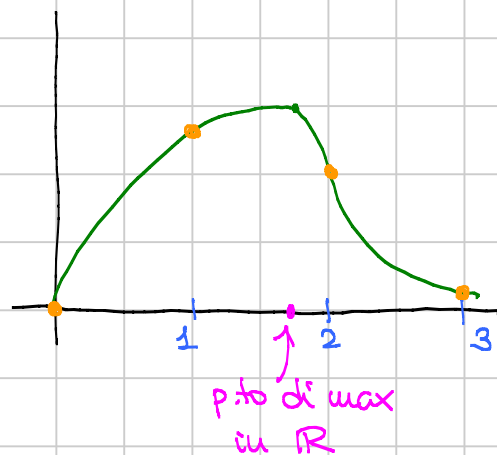
$$\text{Quindi } \max = \sup = \frac{9}{8}. \text{ Il tutto senza calcolare } \frac{4}{e^2 \log^2 2}$$

— o — o —

Leggenda metropolitana. Il max su $\mathbb{N}$ viene raggiunto nel valore $n \in \mathbb{N}$ più vicino al p.to di max su $x \geq 0$.

Questo è falso !!!

Nel disegno accanto il valore + vicino al p.to di max è $n=2$, ma il max su n viene raggiunto per $n=1$.



Procedimento corretto: per il max se la giocano sempre il valore di n precedente e quello successivo al p.to di max sui reali,

— o — o —

Esempio 3

$$\int_0^{+\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}} dx \quad \text{converge?}$$

Brutale: x^2 contrasta la convergenza (rende l'integrandina grande)
 $2^{-\sqrt{x}}$ la favorisce (trascina a 0)

Punto sull'esponenziale e applico un confronto asintotico con
 $g(x) = \frac{1}{x^{23}}$. Calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}} \cdot x^{23} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{25}}{2^{\sqrt{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{25 \log x - \sqrt{x} \log 2} = [e^{-\infty}] = 0 \end{aligned}$$

perché all'esponente $25 \log x - \sqrt{x} \log 2 = \sqrt{x} \left(25 \frac{\log x}{\sqrt{x}} - \log 2 \right) = \dots$

Siamo nel caso limite del confronto asintotico.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \quad \text{vicino al pbm} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{vicino...}$$

$\int g(x) dx$ con pbm. all'infinito converge $\Rightarrow \int f(x) dx$ con pbm. all'infinito converge.

— 0 — 0 —

Esempio 4

$$\sum \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}$$

Criterio della radice: $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2^{1/\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1}{2^0} = 1 \Rightarrow \text{Boh.}$

Rapporto: $\frac{(n+1)^2}{2^{\sqrt{n+1}}} \cdot \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2} = 1 \Rightarrow \text{Boh.}$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \left[\frac{-1}{\infty} \right] = 0$$

Cometto: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{23}}$.

— 0 — 0 —