

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 083

Titolo nota

12/01/2011

NUMERI COMPLESSI: radici n-esime

$$z = a + bi$$

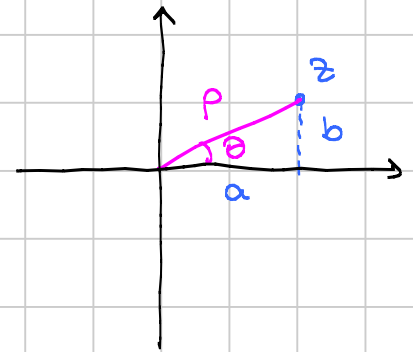
cartesiana

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

trigonometrica

$$z = \rho e^{i\theta}$$

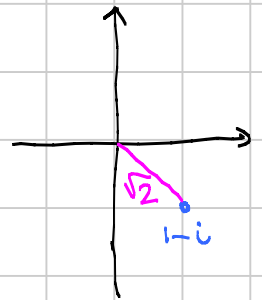
esponenziale



Esempio di potenza $(1-i)^9$

Passo in forma esponenziale

$$1-i = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$$



$$(1-i)^9 = \left[\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right]^9$$

$$= (\sqrt{2})^9 e^{-\frac{9\pi}{4}i} = 16\sqrt{2} e^{-\frac{9\pi}{4}i} = 16\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} = 16(1-i)$$

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi + \pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{9\pi}{4} \sim -\frac{\pi}{4}$$

Radici n-esime di un numero complesso

Dato $w_0 \in \mathbb{C}$ e dato un intero $n \geq 2$, si dicono radici n-esime di w_0 tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^n = w_0$$

Fatto generale: $\rightarrow$ se $w_0 = 0$, l'unica soluzione è $z = 0$

$$[\text{infatti } |z^n| = |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0]$$

$\rightarrow$ se $w_0 \neq 0$, allora l'equazione ha sempre n -radici complesse distinte, che rappresentate nel piano di Gauss sono i vertici di un n -angolo regolare con centro nell'origine.

Come si calcolano le radici n -esime? Lavorando in forma esponenziale.

Scrivo

$$w_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \quad (\rho_0 \text{ e } \theta_0 \text{ sono dati})$$

Scrivo

$$z = \rho e^{i\theta}, \text{ con } \rho \text{ e } \theta \text{ incognite.}$$

Impongo

$$z^n = w_0, \text{ cioè } \rho^n e^{in\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}$$

Uguaglio modulo e argomento:

$$\rho^n = \rho_0$$

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi$$

← affinché 2 numeri complessi siano uguali basta che gli argomenti differiscano per un multiplo di 2π

Ricavo ρ e θ :

$$\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Achtung! Non confondere MAI le radici n -esime di un numero complesso con la radice n -esima di un numero reale.

Le radici n -esime di un numero complesso esistono sempre e sono n numeri complessi (tranne nel caso $w_0 = 0$)

La radice n -esima di un numero reale è sempre unica (quando esiste: c'è il problema per n pari e argomento < 0).

Quando scrivo $\sqrt[n]{\rho_0}$ intendo la radice n -esima reale (UNICA!) del numero reale positivo ρ_0 .

Osservazione: Alla variabile k posso sostituire un qualunque intero positivo o negativo o nullo. Tuttavia i valori si ripetono dopo n , cioè sostituendo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ho tutti i valori possibili di θ , quindi alla fine le soluzioni sono "solo" n .

Esempio 1 Calcolare le radici cubiche di $8i$, cioè risolvere

$$z^3 = 8i$$

Scrivo $8i$ in forma esponenziale $8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$. Scrivo $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^3 = \rho^3 e^{3i\theta} = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Devo risolvere

$$\rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} = 2 \quad (\text{vecchia radice cubica sui reali})$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

Sostituisco $k=0,1,2$:

$$k=0$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$k=1$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$k=2$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

Se andassi avanti a sostituire $k=3$ $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ e ritrovo $\frac{\pi}{6}$

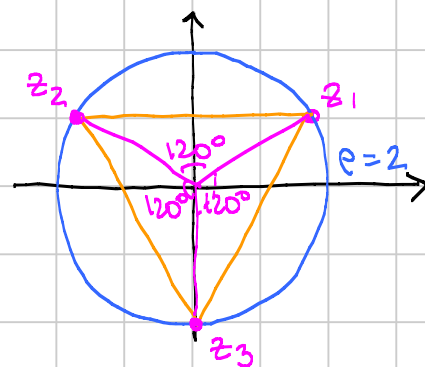
In conclusione le 3 radici cubiche di $8i$ sono

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = -2i$$

$$\text{Oss: } (-2i)^3 = (-2)^3 \cdot i^3 = -8 \cdot (-i) = 8i$$



Scrivo in maniera cartesiana z_1 e z_2

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = \dots = -\sqrt{3} + i$$

Oss. Il poligono è regolare perché passando da un θ al successivo aggiungo $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

Esempio 2 Calcolare le radici cubiche di -8 , cioè $z^3 = -8$

$$-8 = 8e^{\pi i} \quad z^3 = -8 \quad \rho^3 e^{3i\theta} = 8e^{\pi i}$$

$$\rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} = 2; \quad 3\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k}{3}\pi$$

Sostituisco $k = 0, 1, 2$

$$k=0 \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$k=1 \quad \theta = \pi$$

$$z_1 = 2e^{\pi i}$$

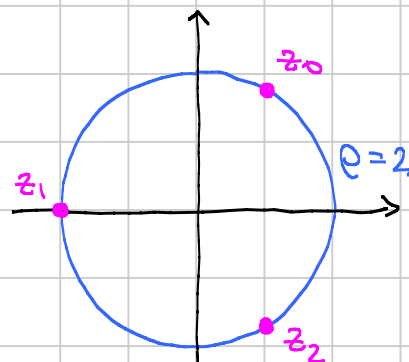
$$k=2 \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$z_1 = 2e^{\pi i} = -2 \quad (\text{N.B. } (-2)^3 = -8)$$

$$z_2 = \bar{z}_0 = 1 - i\sqrt{3}$$



Esempio 3 Radici quarte di -1 , cioè risolvere $z^4 = -1$

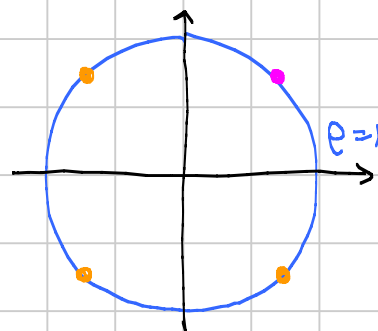
Il modulo di -1 è 1 . Quindi tutte le radici quarte di -1 avranno $\rho = 1$.

Il θ sarà $\frac{1}{4}$ del θ di -1 , quindi $\frac{\pi}{4}$

Così ho trovato una radice. Le altre devono formare un quadrato. Quindi le 4 radici sono date da

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm i)$$

4 possibilità per i segni



(Esercizio! rifarlo facendo i conti).